

## SOCIETÀ ITALIANA DI STORIA DELLE MATEMATICHE

### *La Matematica nel Rinascimento* *La Matematica nel Novecento*

Perugia, 26-28 Novembre 2009  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Via Vanvitelli 1

### SUNTI DELLE CONFERENZE

#### *Lo statuto della variabile temporale nel principio di minima azione. Il contributo di Olinde Rodrigues*

FABER FABBRIS

(Membro della Société Mathématique de France)

faber.fabbris@yahoo.fr

Il principio di minima azione (nella versione intuita da Maupertuis, poi formalizzata da Euler e Lagrange) può così essere sinteticamente espresso:

$$\delta A = 0, \text{ ove } A = \int_{s_1}^{s_2} mv ds,$$

con ovvio significato dei simboli. In questo approccio si assume implicitamente di confrontare traiettorie per le quali l'energia totale del sistema non varia, ma è variabile la durata del moto tra due estremi fissi.

Nella versione "hamiltoniana" dello stesso principio,

$$\delta S = 0, \text{ ove } S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

si considera la variazione dell'energia totale del sistema, imponendo d'altro canto il confronto fra traiettorie di eguale durata.

Nelle due versioni, le variazioni di energia totale e di durata del moto si escludono quindi reciprocamente.

Nella prima versione della *Mécanique Analytique* (1788), Lagrange imponeva che l'energia totale per le differenti traiettorie fosse la stessa, considerando però la variabile temporale non affetta dal processo di variazione ( $\delta t = 0$ ). Ciò lasciava persistere una ambiguità sul ruolo delle due grandezze. Nelle successive edizioni della *Mécanique* (1811-1816) il matematico torinese sarà meno esplicito sullo statuto della variabile temporale; parallelamente, la "minima azione" sarà considerata non più come principio-postulato ma come un corollario (partendo dalle equazioni newtoniano-d'alembertiane e dalla "conservazione delle forze vive").

Hamilton confronterà in seguito (1834-1835) traiettorie con diverse energie totali (ma ben inteso costante durante il moto) secondo l'approccio prima ricordato.

L'orientamento di Jacobi, emerso in una prima pubblicazione del 1837, e ribadito nelle successive *Vorlesungen*, puntava all'eliminazione della variabile temporale nell'integrale variazionale tramite l'equazione delle forze vive.

Qui si inserisce la riflessione di Olinde Rodrigues (1795-1851), la cui originale opera matematica fu accompagnata da un non meno significativo impegno politico e filosofico. La sua produzione scritta spazia tra scritti socialisti utopici, trattati finanziari e bancari,

articoli scientifici. In matematica è principalmente ricordato per le sue formule sui gruppi di trasformazioni, introdotte in uno studio sulla rotazione del corpo rigido attorno a un punto fisso.

Meno note sono forse le indagini matematiche di Rodrigues sul principio di minima azione. Con un approccio inedito, il matematico bardoiese si propose di dedurre le equazioni di Euler-**Lagrange** dalla forma “maupertuisiana” del principio, introducendo la conservazione dell’energia come condizione vincolare ed applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

In questa prospettiva, egli stabilisce, in una nota pubblicata nel 1816, l’equazione

$$\int \delta T dt + \lambda dt(\delta T + \delta V) = 0$$

sottolineando la necessità che il processo variazionale *coinvolga anche la variabile temporale*. Di qui, sfruttando l’omogeneità di grado 2 della  $T$  (energia cinetica) rispetto alle derivate temporali delle coordinate, Rodrigues perviene alle equazioni di Euler-Lagrange.

Emergono in definitiva due esiti alternativi riguardo allo statuto della variabile temporale. Quello di Jacobi, che porta alla “geometrizzazione” del principio di minima azione; quello, certo meno fortunato, indicato da Rodrigues, che prende pienamente in conto la variazione della  $t$ .

Quest’approccio resterà a lungo senza seguito. Il lavoro di Rodrigues sarà di nuovo citato e adeguatamente apprezzato quasi un secolo più tardi, anche grazie al dibattito sui fondamenti del calcolo delle variazioni, particolarmente ricco nel periodo a cavallo fra il XIX ed il XX secolo.

#### **Bibliografia essenziale**

- Altman S., Ortiz E.L. eds. 2005, *Mathematics and Social Utopias in France. Olinde Rodrigues and his times*, Providence, American Mathematical Society.
- Dugas R. 1950, *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, Griffon.
- Hamilton W.R. 1834, *On a General Method in Dynamics [...]*, Philosophical Transactions of the Royal Society, 124, pp. 247-308.
- Hamilton W.R. 1835, *Second Essay on a General Method in Dynamics*, Philosophical Transactions of the Royal Society, 125, pp. 95-144.
- Jacobi C.G.J. 1837, *Note sur l’intégration des équations différentielles de la dynamique*, Comptes Rendus de l’Académie des sciences de Paris, 5, pp. 61-67.
- Jacobi C.G.J. 1884, *Vorlesungen über der Dynamik*, in Borchardt C.W., Weierstrass K., Lottner E., Clebsch A. (eds.), *C.G.J. Jacobi’s Gesammelte Werke*, Supplementband, 8, Berlin, Reimer.
- Jourdain P.E.B. 1908, *On those Principles of Mechanics which depend upon Processes of Variation*, Mathematischen Annalen, 65, pp. 513-527.
- Lagrange J.L. 1788, *Mécanique Analytique*, Reprint, 1989, Paris, Jacques Gabay.
- Lagrange J.L. 1811-1816, *Mécanique Analytique*, in Bertrand J., Darboux G. eds., 1888-1889, *Œuvres*, t. 11 e 12, Paris, Gauthier-Villars.
- Lanczos C. 1970, *The Variational principles of mechanics*, New York, Dover.
- Martin-Robine F. 2006, *Histoire du Principe de moindre action*, Paris, Vuibert.
- Rodrigues O. 1816, *De la manière d’employer le principe de moindre action, pour obtenir les équations du mouvement rapportées aux variables indépendantes*, in Hachette M. (ed.), *Correspondance sur l’École Impériale Polytechnique*, v. 3, 2, pp. 153-159, Paris, Courcier.
- Voss F., Cosserat E. et F. 1915, *Principes de la Mécanique rationnelle*, in Molk J., Appell P., *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Reprint, 2005, Paris, Jacques Gabay.