

SOCIETÀ ITALIANA DI STORIA DELLE MATEMATICHE

La Matematica nel Rinascimento La Matematica nel Novecento

Perugia, 26-28 Novembre 2009
Dipartimento di Matematica e Informatica
Via Vanvitelli 1

SUNTI DELLE CONFERENZE

La Trasformata Rapida di Fourier e la divisione fra polinomi: l'algoritmo di C. M. Fiduccia. Una nota storico-didattica

MASSIMO GALUZZI
(Università di Milano)
massimo.galuzzi@unimi.it

Nel 1965 J. W. Cooley e J. W. Tukey decidono di rendere pubblico un algoritmo che riduce drasticamente il numero di operazioni necessarie per calcolare la Trasformata Discreta di Fourier: si tratta dell'algoritmo della Trasformata Rapida di Fourier.¹ In breve tempo l'algoritmo si rivela decisivo per il progresso della matematica e della tecnologia che da essa dipende e negli anni successivi si ha una vera e propria esplosione di lavori dedicati alla FFT. L'algoritmo viene riproposto in innumerevoli varianti e altri algoritmi che riducono similmente il numero delle operazioni necessarie per il calcolo della Trasformata Discreta vengono presentati.²

Tra questi algoritmi ve n'è uno molto semplice ed elegante, proposto da C.M. Fiduccia,³ che, all'interno di un sistema di computer algebra, può essere descritto 'a vari livelli': da un'implementazione ingenua, che operi direttamente sui polinomi, ad una versione più raffinata che utilizzi gli array. Mi soffermerò brevemente su questo punto.

Inoltre la FFT ha costituito un interessante oggetto di indagine storica. Pareva incredibile che un algoritmo così importante fosse sorto dal nulla. Ed in effetti questa indagine ha mostrato molti 'precursori', tra i quali primeggia l'esempio illustre di Gauss.⁴ In effetti nelle opere di Gauss si trova uno scritto (inedito) che contiene un risultato sull'interpolazione trigonometrica che, interpretato in termini di variabile complessa, produce un algoritmo equivalente alla FFT.⁵ Naturalmente questa 'equivalenza' produce molti interrogativi, tra i quali quello del rapporto (mutevole nel tempo) tra il disporre ordinatamente una serie di calcoli o il ridurre, a prezzo di una minor semplicità, il loro numero.

¹ Cf. [Cooley (1965)]. Questo fondamentale articolo è anche riprodotto in [Tukey (1984)]. È di uso comune l'acronimo inglese: FFT (Fast Fourier Transform).

² Si veda, per esempio, [Cooley (1990)], [Cipra (1993)]. In [Heideman (1984)] vi sono 2418 referenze. Non tutte sono relative alla FFT, ma il dato è comunque impressionante.

³ Cf. [Fiduccia (1972)]. L'algoritmo è anche molto efficace. Si veda [Bernstein (2007)].

⁴ Cf. [Heideman (1985)], [Cooley (1994)].

⁵ Cf. [Goldstine (1977)], [Heideman (1985)], [Galuzzi (1994)].

Bibliografia

- [Bernstein (2007)] Bernstein D. J. 2007, *The tangent FFT*, in [Boztas e Hsiao-feng Lu (2007)], pp. 291--300.
- [Boztas e Hsiao-feng Lu (2007)] Boztas S.; Hsiao-feng Lu, (a cura di) 2007, *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, 17th International Symposium, AAECC-17*, volume 4851 di *Lecture Notes in Computer Science*, Springer.
- [Brown e altri (1994)] Brown J. D.; Chu M. T.; Ellison D. C.; Plemmons R. J. (a cura di) 1994, *Proceedings of the Cornelius Lanczos international Centenary Conference*, Philadelphia, PA. SIAM.
- [Cipra (1993)] Cipra B. A. 1993, *The FFT: making Technology fly*, Siam News, 26, 3, pp. 1, 23.
- [Cooley (1990)] Cooley J. W. 1990, *How the FFT gained Acceptance*, in [Nash (1996)], pp. 133-140.
- [Cooley (1994)] Cooley J. W. 1994, *Lanczos and the FFT; a Discovery Before its Time*, in [Brown e altri (1994)], pp. 3-9.
- [Cooley e Tukey (1965)] Cooley J. W.; Tukey J. W. 1965, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Mathematics of computations, 19, 2, pp. 297-301.
- [Fiduccia (1972)] Fiduccia C. M. 1972, *Polynomial evaluation via the division algorithm. The Fast Fourier Transform revisited*, in Proc. 4th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp. 88-93.
- [Galuzzi (1994)] Galuzzi M. 1994, *L'interpolazione trigonometrica in Gauss, Bessel e Cauchy* in *Scritti in onore di Giovanni Melzi*, a cura di Manara C., Faliva G., Marchi M., pp. 173-212, Vita e Pensiero, Milano.
- [Goldstine (1977)] Goldstine G. H. 1977, *A History of numerical Analysis from the 16th through the 19th Century, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, Vol. 2. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- [Heideman e Burrus (1984)] Heideman M. T.; Burrus C. S. 1984, *A Bibliography of Fast Transform and Convolution Algorithms ii*, Relazione tecnica, Rice University, Technical Report Number 8402.
- [Heideman e altri (1985)] Heideman M. T.; Johnson D. H.; Burrus C. S. 1985, *Gauss and the History of the Fast Fourier Transform*, Archive for history of exact sciences, 34, pp. 265-277.
- [Nash (1996)] Nash S. G. 1996, *A History of scientific Computing*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [Tukey (1984)] Tukey J. W. 1984, *The Collected Works of John W. Tukey, Volume II: Time Series, 1965-1984*, Wadsworth Advanced books & Software, Monterey, California.