

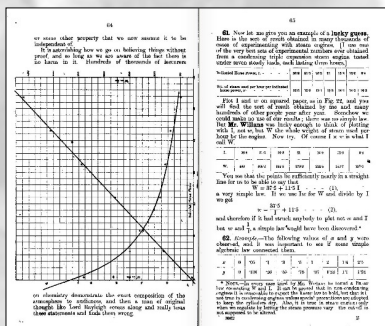


DALLA STORIA DELLA MATEMATICA ALL'AULA

Ferrara 9 maggio 2025

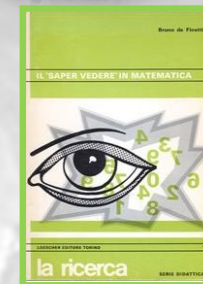
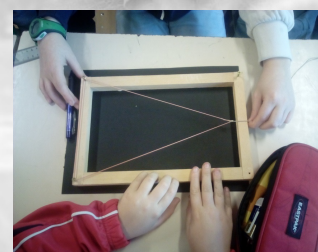
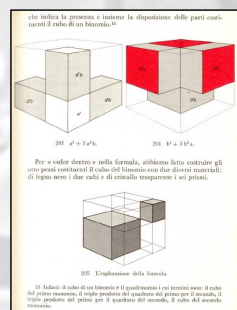
"Lavorare con le mani e con la mente"

Origini ed esempi del laboratorio di matematica



$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

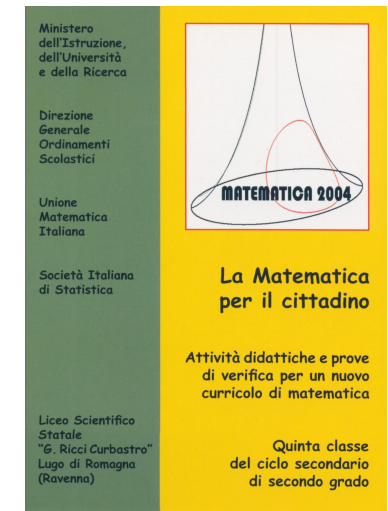


Livia Giacardi
Dipartimento di Matematica –Torino

Attualità del dibattito sul laboratorio di matematica

❑ UMI-CIIM Matematica 2001, 2003, 2004

*Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge **persone** (studenti, insegnanti), strutture (aule, strumenti, ...), **idee** (progetti, piani di attività didattiche, **sperimentazioni**. [Matematica 2003, p. 28]*



❑ Notiziario dell'UMI 2007:

dibattito fra Enrico Giusti e Gabriele Anzellotti sul laboratorio di matematica nato da riflessioni sul documento del Gruppo Berlinguer del maggio 2007 per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica.

Giusti

*«ecco la panacea: **più metodo sperimentale, più laboratorio, un pizzico di storia**» ... «Penso che l'uso di un laboratorio scientifico sia essenziale nell'insegnamento. Ma il laboratorio non è la scienza, meno che mai tutta la scienza»
«**la matematica è una scienza deduttiva per antonomasia**»*

Anzellotti

ritiene giusta la proposta di un grande rinnovamento della didattica nella direzione del laboratorio, inteso in senso ampio:

*«Credo che nel contesto dell'insegnamento/ apprendimento sia utile chiamare laboratorio una situazione in cui lo **studente è attivo** e mette le proprie idee, le proprie conoscenze in relazione con fenomeni, fatti e problemi ... **formulando ... ipotesi/congetture, progettando azioni, esperimenti e osservazioni mirate, ... Nel laboratorio si usano le mani e il corpo, si opera con oggetti concreti, si usano tecniche e strumenti, si misura e si documenta. Nel laboratorio si discute con i compagni di lavoro e con l'insegnante sull'interpretazione di quello che accade, si progettano azioni e attività di gruppo, si comunica con altri.**»*

Giusti: *«Il problema è di misura. Così come i laboratori di fisica, anche quelli di matematica sono i benvenuti, purché sia chiaro quale sia il loro scopo e la loro funzione: **stimolare e interessare gli studenti.**» «Nelle scuole secondarie non bisogna dimostrare tutto. Alcune cose si possono saltare, ...MA BISOGNA DIMOSTRARE. Non si può ridurre la matematica all'elencazione di ricette e teoremi privi di struttura e di giustificazione e allo sviluppo di una manualità cieca.»*

❑ 2025 Indicazioni Nazionali: *«La scuola ha il compito di adottare un metodo laboratoriale che parta da un'esperienza diretta e concreta, legata alla realtà quotidiana, per poi sviluppare riflessioni più astratte. Questo modello didattico è fondamentale per far acquisire agli studenti competenze sia pratiche e sia culturali.»*

- Anzellotti ribadisce che il laboratorio è *un insieme strutturato di attività, volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Tale costruzione deve essere necessariamente fatta nella mente di ciascun allievo, **la modalità laboratoriale non si usa soltanto per sviluppare competenze pratiche, ma proprio per costruire i concetti, e il senso e l'idea dell'argomentare e del dimostrare.***
- Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica

Laboratorio → spazio da offrire agli allievi per poter dare libero sfogo ad attività spontanee e costruttive, individuali e di gruppo. Luogo dove poter *lavorare con le mani e con la mente*

Friedrich A. Fröbel
giardini d'infanzia

Johann H. Pestalozzi
metodo intuitivo

Maria Montessori
(1870–1952)
Materiale didattico

Alfred Binet, divulgatore
della *scuola attiva*

Ovide Decroly,
promotore
della *scuola
del lavoro*

John Perry
(1850-1920),
promotore
della *Practical
Mathematics*

Émile Borel
(1871-1956)

Eliakim H. Moore
(1862-1932)
*Laboratory method in
mathematics*

Felix Klein
(1849-1925)
Arbeitsräume

Giovanni Vailati
(1863-1909),
sostenitore in Italia
della *scuola come
laboratorio*

Emma Castelnuovo
(1913-2014),
geometria intuitiva

John Perry (1850-1920)

Origini dell'idea di laboratorio di matematica



Professore di meccanica e matematica al *Royal College of Science* di Londra dal 1896.

Perry sostiene che la matematica deve essere insegnata “*come ogni altra scienza ... con esperimenti e ragionamenti ispirati al senso comune*”

Practical Mathematics:

«L'idea basilare nel metodo di studio chiamato **Practical Mathematics** è che lo studente dovrebbe familiarizzarsi con le cose prima che gli venga chiesto di ragionare su di esse» [Perry 1913, 21]

esperimenti, misure effettuate usando la carta millimetrata, raccolta di dati, disegno, metodi grafici, collegamenti con la fisica e altre scienze.

Influenza dei metodi usati nei **giardini d'infanzia** (Pestalozzi e Froebel) basati sull'**attività** degli allievi e sull'educazione “*dell'occhio e della mano*” [Perry 1901, 27].

Fallimento dell'insegnamento tradizionale nei confronti dello studente medio:

“I metodi accademici di insegnare la matematica funzionano con circa il cinque per cento di tutti gli studenti, quella piccola minoranza appassionata del ragionamento astratto: falliscono del tutto con lo studente medio”
[Perry 1913, VII]

*“Noi ora insegniamo a tutti i ragazzi quella che è chiamata **filosofia matematica** cosicchè possiamo prendere nella nostra rete l'unico semidio, il solo matematico puro e **facciamo del nostro meglio per rovinare tutti gli altri**”*
[Perry 1902, 6]

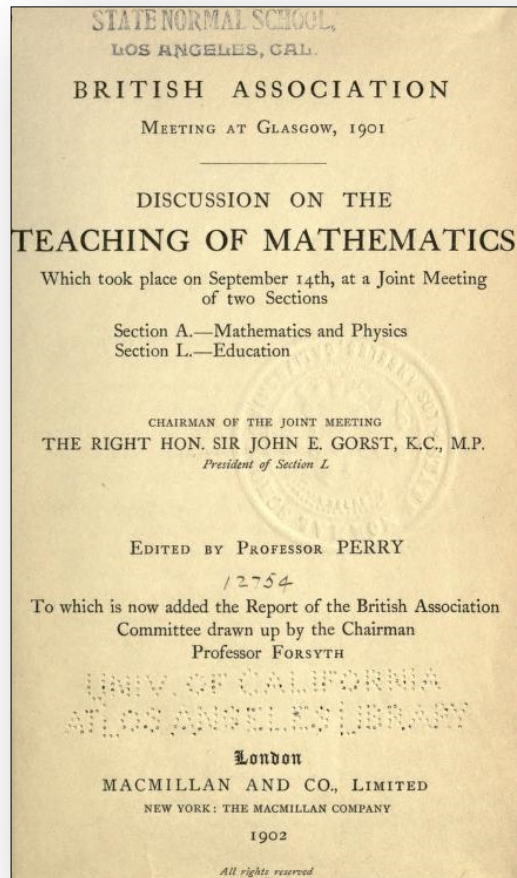
Cause

- insegnamento per “*compartimenti stagni*”
- tendenza a dare troppa importanza agli aspetti astratti della matematica e alle “regole evita-fatica”.

Scopo dell'insegnamento:

“Noi dobbiamo cercare di produrre persone in grado di imparare”

[*Report* 1909, 11]



1902

Glasgow 1901 - Convegno della *British Association for the Advancement of Science*

Perry illustrò le sue proposte di programmi di *practical mathematics* per i corsi sia elementari, sia avanzati.

[Perry 1902, 25-32].

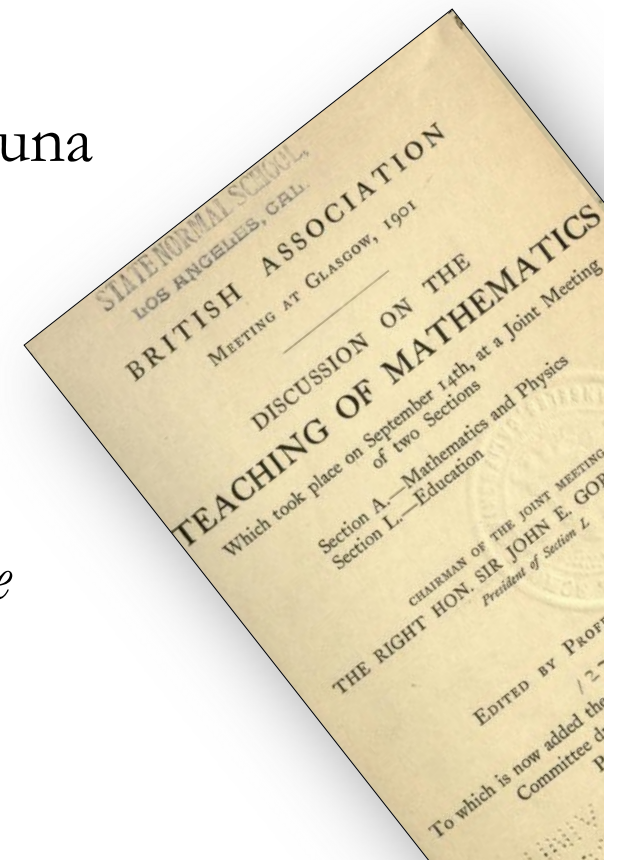
Intervento di David E. Smith sulle difficoltà di attuazione:

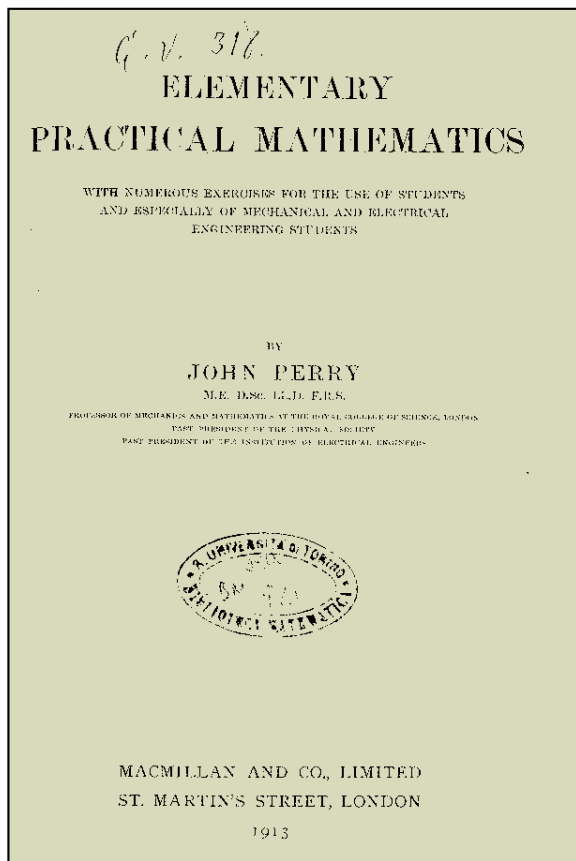
- nuovi libri di testo
- formazione insegnanti
- riforma degli esami

[Perry 1902, 90-91]

Scopi e utilità della matematica

- Produrre profonde emozioni e dare piacere intellettuale.
- Insegnare a pensare in modo logico.
- Offrire le “*armi*” matematiche nello studio delle scienze fisiche.
- Fornire agli uomini strumenti intellettuali “*così facili da usare come le gambe e le braccia*”.
- Fare in modo che coloro che sono impegnati in una professione di scienza applicata conoscano i principi su cui essa è fondata e secondo cui si è sviluppata.
- Consentire il superamento degli esami, “*il solo aspetto che non è mai stato trascurato e l'unico veramente riconosciuto dagli insegnanti*”. [Perry, 1902, 4-5].





1913

Aritmetica, algebra, geometria, analisi infinitesimale, fisica.

La presentazione riflette un **approccio laboratoriale**:

- si parte in genere da un **problema pratico**;
- **si raccolgono e si interpretano dati numerici**;
- **si usa la carta quadrettata** per tabulare osservazioni, risolvere graficamente equazioni, per rappresentare funzioni, trovare la pendenza della tangente ad una curva,...;
- si insegna a costruire e a usare strumenti matematici

- si stabiliscono collegamenti fra le varie parti della matematica
- si mostra l'utilità della matematica per affrontare problemi della fisica e dell'ingegneria.

indicazioni metodologiche o consigli agli insegnanti

[Perry 1913, 21, 25, 32, 51-52]

Il metodo della *Practical Mathematics* **può essere utilizzato a tutti i livelli di insegnamento** a patto che la trattazione rimanga legata a fenomeni reali e a problemi concreti.

In aritmetica: più enfasi sui decimali e sulle approssimazioni che sulle frazioni.

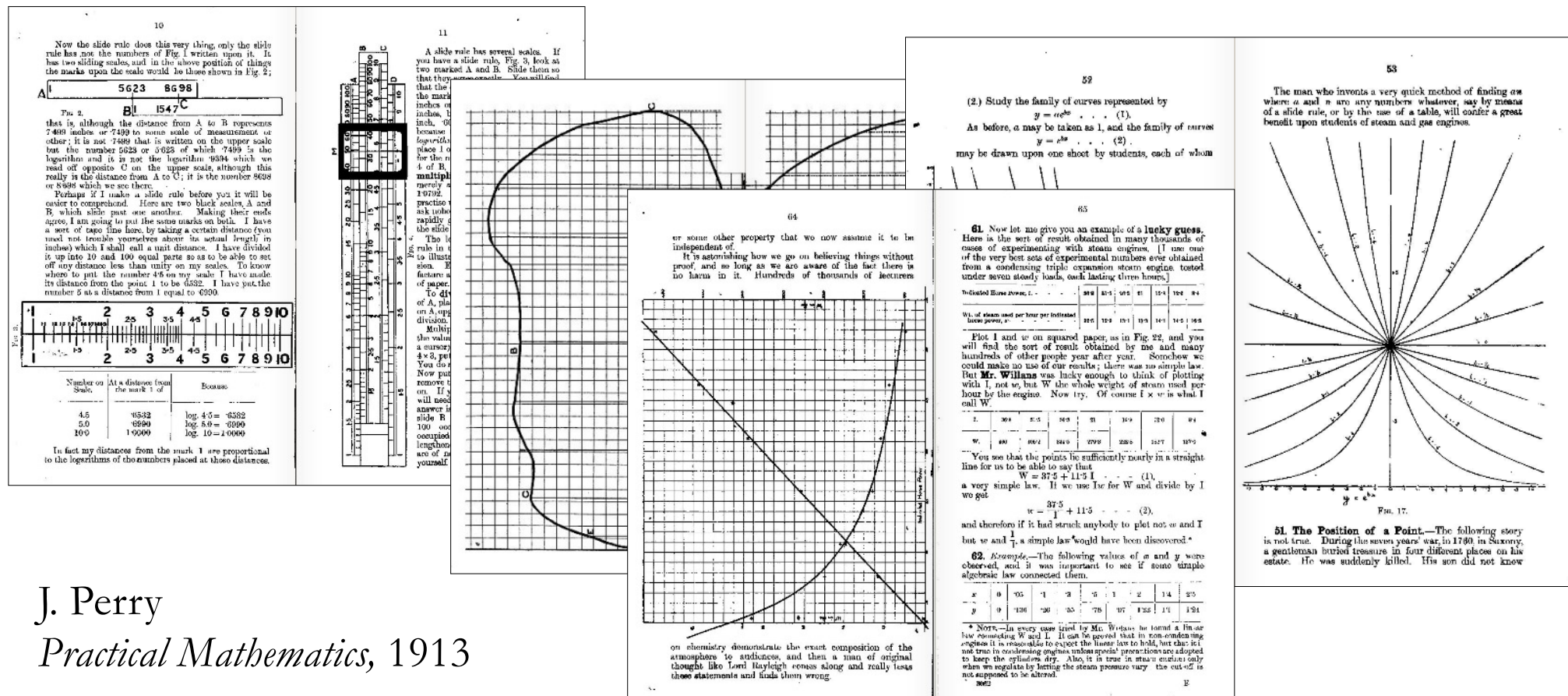
In algebra: attenzione alla comprensione e alla manipolazione delle formule.

In geometria:

Perry critica il metodo euclideo

Suggerisce che:

- sperimentazioni e misurazioni pratiche con l'uso della carta quadrettata vengano anteposte alla geometria dimostrativa;
- qualche ragionamento deduttivo affianchi la geometria sperimentale;
- si dia più importanza alla geometria solida;
- si utilizzino nozioni di trigonometria nello studio della geometria;
- si presti più attenzione alle applicazioni. [Perry 1902, 102]



- Problem solving
 - approccio trasversale alla matematica molto concentrato sulle procedure.
 - matematica da “praticare” e non da sistematizzare in una teoria
- Questa la sua originalità, e nello stesso tempo il suo limite.

Influenza del movimento di Perry in Inghilterra

■ maggiore **diffusione di metodi pratici** nell'insegnamento della matematica: **la rappresentazione grafica di funzioni, e l'uso della carta quadrettata erano adottati in circa il 90% delle scuole pubbliche inglesi** (ragazzi dai 12 ai 18 anni) [ICM, Cambridge 1912, inchiesta di Charles Godfrey].

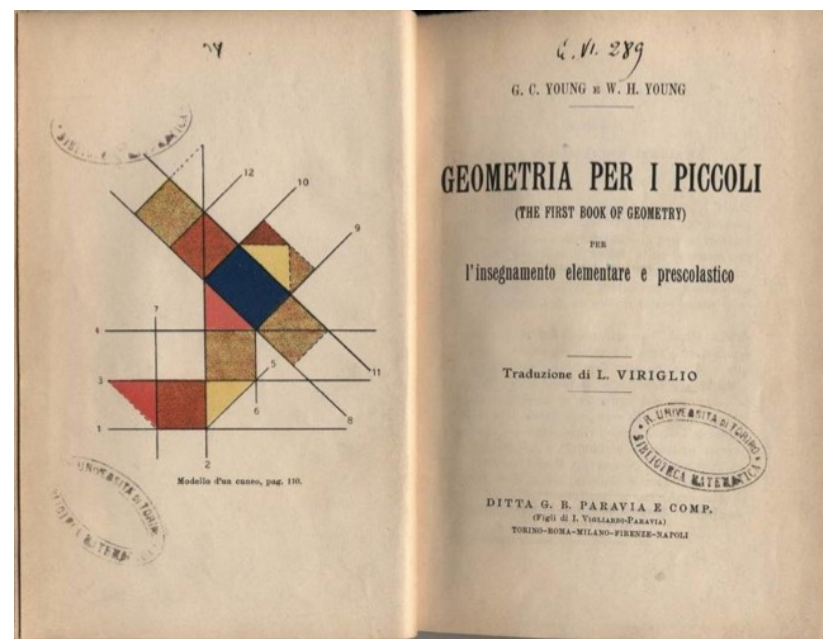
■ affermazione di alcuni principi basilari :

- **maggiore democrazia nell'educazione,**
- **maggiore considerazione di ciò che serve nella vita reale,**
- **maggiore attenzione agli aspetti pedagogici.**

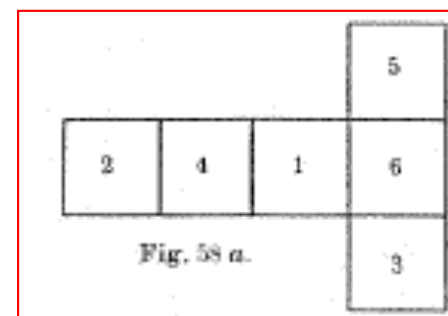
■ più spazio al lavoro sperimentale nell'**insegnamento della geometria**, comparsa di laboratori in molte scuole e di nuovi libri di testo.

Grace e William Young A *First Book of Geometry* (1905),

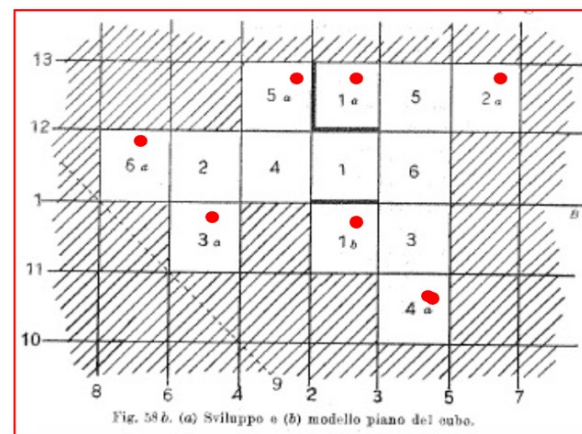
tradotto in italiano da Luisa Viriglio
su suggerimento del suo professore
Corrado Segre.



La scoperta delle proprietà
geometriche e dei teoremi nasce
dalla costruzione e dalla
manipolazione di modelli di
cartone.



sviluppo



«modello
piano» con
facce da
incollare per
comporre il
solido.

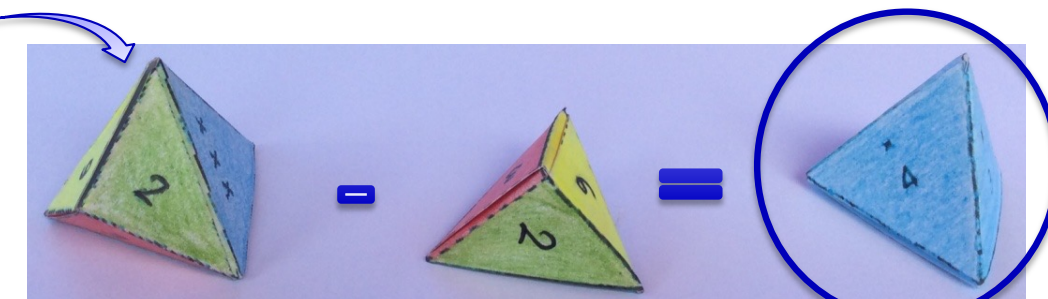
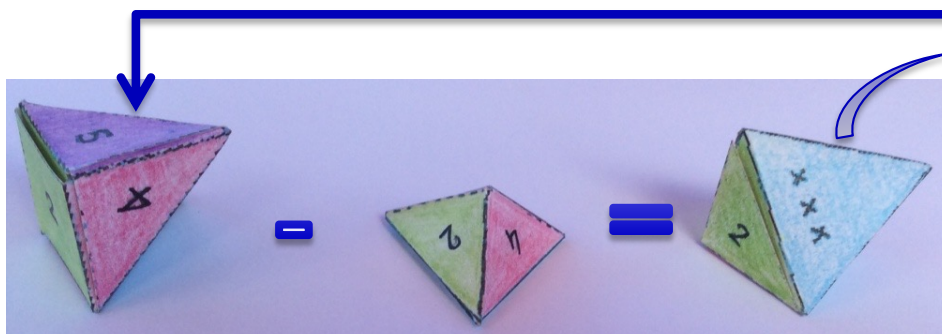
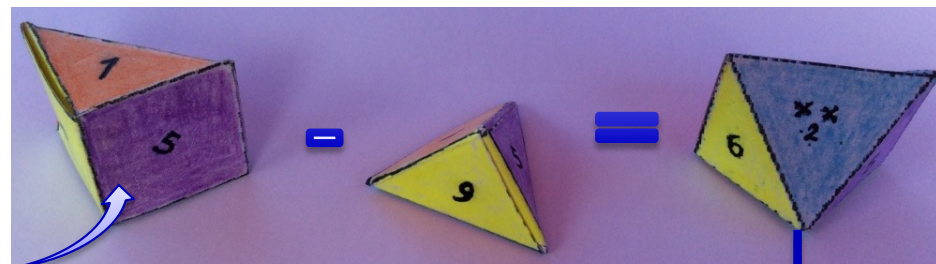
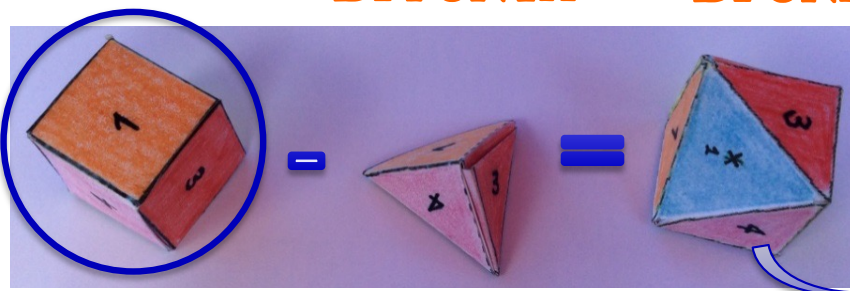
CUBO

TETRAEDRO
DI PUNTA

CUBO MANCANTE
DI UNA PUNTA

TETRAEDRO
DI PUNTA

BATTELLO
DI PUNTA



BATTELLO
DI PUNTA

TETRAEDRO
DI PUNTA

DOPPIO
TETRAEDRO

TETRAEDRO
DI PUNTA

TETRAEDRO
REGOLARE

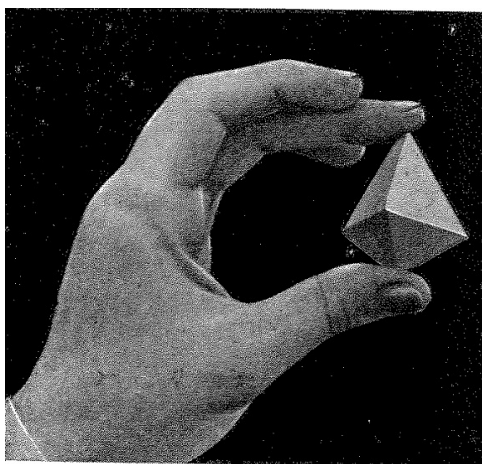


Fig. 82. Doppio tetraedro ottenuto dal cubo.

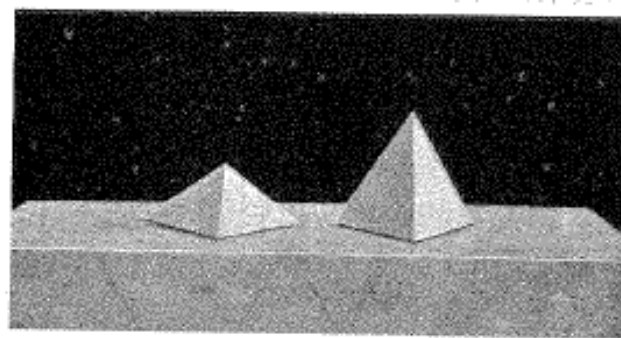
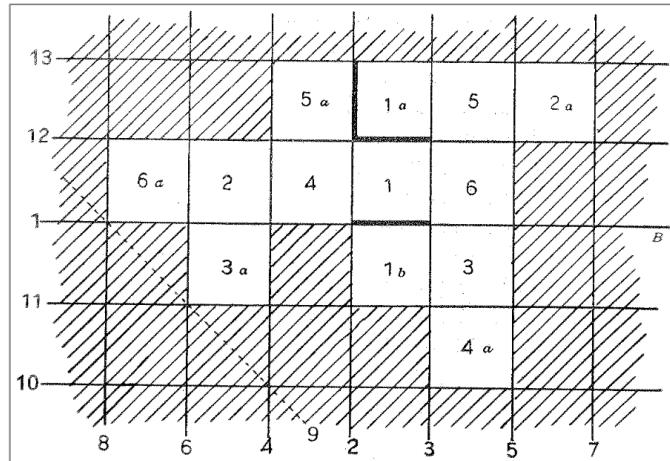


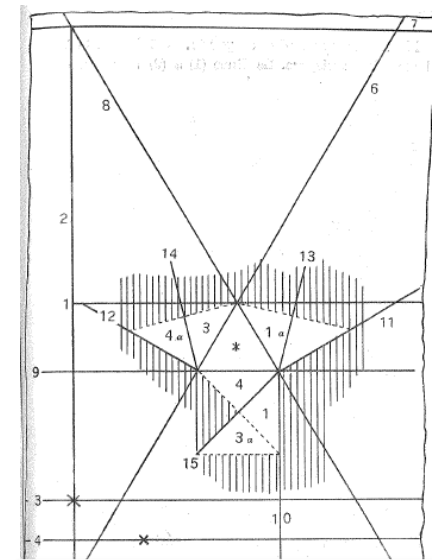
Fig. 84. Tetraedro di punta e tetraedro regolare.

Di tutti questi solidi che abbiamo ottenuto dal cubo, il **tetraedro regolare** è il primo le cui facce siano tutte congruenti. Vedete pure che in ogni vertice occorre lo stesso numero di facce disposte nello stesso modo. Perciò il tetraedro con quattro facce equilatera, dicesi regolare, è regolare come il cubo. (p. 140)

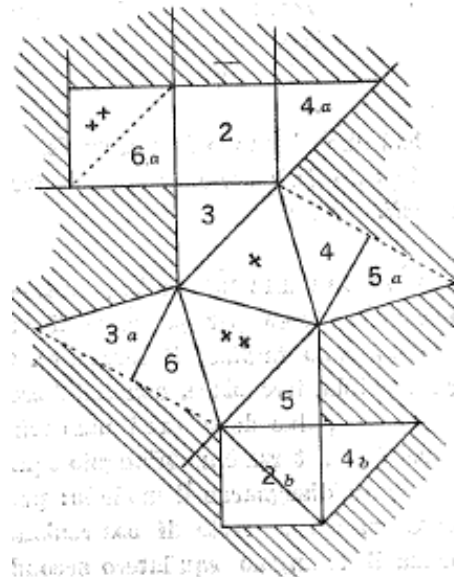
Costruendo, poi, un doppio tetraedro regolare, si mostra anche che un solido a facce congruenti non è necessariamente regolare.



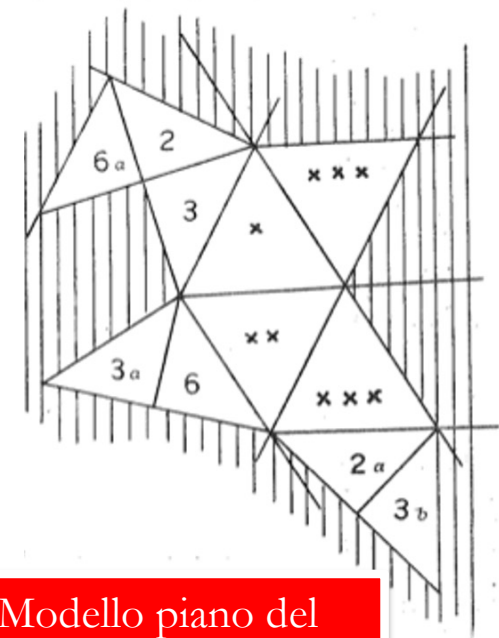
Modello piano del cubo



Modello piano del tetraedro di punta



Modello piano del battello di punta



Modello piano del doppio tetraedro

TEOREMA.

La somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti, (180°).

Costruiamo un triangolo qualunque. Due almeno dei suoi angoli essendo acuti, chiamiamo B e C i loro vertici, e il terzo vertice sia A . Allora, se AP (fig. 112) è la perpendicolare condotta da A su BC , PA e PB s'incontrano in P , e s'incontrano così che i due an-

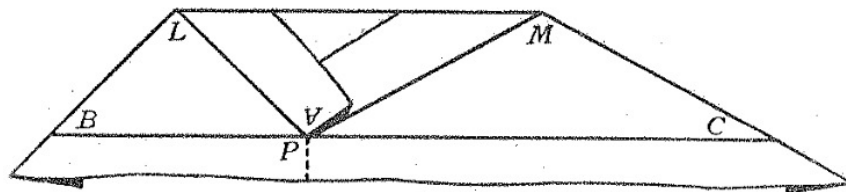


Fig. 112.

goli interni dalla stessa banda di BP da cui sta A danno meno di due angoli retti e uno di essi, quello in P , è retto: quello in B dovrà essere acuto, quindi P si trova fra B e C .

Se ripieghiamo A su P , la piega biseca AP ad angolo retto, ed è perciò parallela a BC , e taglia in conseguenza (cfr. Eserc. 2, pag. 173) AB e AC in due punti L ed M , tali che $AL=LB$ e $AM=MC$. Possiamo perciò portare tanto B quanto C a giacere in P , così che LB giaccia lungo LP ed MC lungo MP : allora i tre angoli del triangolo ricoprono per l'appunto in P due angoli retti, il che dimostra il teorema.

Il lavoro proposto dagli autori è un lavoro manuale, ma anche mentale.

Uso della carta piegata per semplici dimostrazioni:

«Le dimostrazioni fatte con piegature di carta possono essere ben condotte da fanciulli che non riuscirebbero a disegnare una buona figura:» (p. XI)

... in Europa (Francia, Germania), negli Stati Uniti, in Giappone

Negli anni Ottanta Perry compie un viaggio in Giappone e sperimenta il suo metodo nelle scuole giapponesi.



Eliakim H. Moore (1862-1932)

1902: *Laboratory method in mathematics*

Felix Klein (1849-1925)

1905 Meraner Lehrplan: *Arbeitsräume* (spazi di lavoro)



Émile Borel (1871-1956)

1909: *Laboratoire d'enseignement mathématique*

... in Italia

La scuola-laboratorio
di Giovanni Vailati (1863-1909)



Matematico, con interessi per la logica, la filosofia, la storia della scienza, la pedagogia e la psicologia, era membro della Scuola di Giuseppe Peano.

Laurea in ingegneria a Torino nel **1884** e in matematica nel **1888**.

Dopo aver insegnato per alcuni anni all'Università di Torino,

nel **1899** lasciò Torino per insegnare nelle **scuole secondarie** (Pinerolo, Siracusa, Bari, Como e Firenze).

L'interesse di Vailati per i problemi dell'insegnamento risale agli anni torinesi

Impegno nell'ambito

- della **Mathesis**
- della **Federazione Nazionale Insegnanti delle Scuole Medie** (FNISM)
- **International Congress of Mathematicians** (Roma 1908)
- della **Commissione Reale** per la riforma delle scuole secondarie (1905-1909)

Radici teoriche della visione vailatiana dell' insegnamento della matematica

- ▶ conoscenza dei programmi e dell'organizzazione scolastica degli altri paesi europei [Cart 41, *Fondo Vailati*, Milano]
- ▶ attenzione ai movimenti di riforma di **F. Klein** in Germania, di **J. Perry** in Inghilterra e di **G. Darboux** in Francia
- ▶ **Frequentazione di Peano e della sua scuola** (rigore, riflessione sul linguaggio, esigenza di democratizzazione del sapere)
- ▶ **Pragmatismo di Sanders Peirce** (lotta contro i problemi privi di senso)
- ▶ **Istanze positivistiche** (*humanitas* scientifica, didattica basata su una conoscenza positiva dell'uomo, il processo conoscitivo procede dai fatti alle astrazioni, valore applicativo del sapere)
- ▶ **Interesse nei confronti della psicologia**
Partecipò ai congressi di Monaco 1896, Parigi 1900, Roma 1905

Radici pratiche: limiti e carenze dell'organizzazione scolastica

► **verbalismo e apprendimento passivo** rendono la scuola “*una **palestra mnemonica***” dove l'allievo è “*considerato come un recipiente da riempire*” ed è “occupato a imparare (*accipere*) e troppo poco a capire (*concipere*)” [Vailati 1899, S III, 261]

“*sistema di coltura intensiva, troppo simile al sistema di nutrizione posto barbaramente in opera nelle campagne della bassa Lombardia per ottenere i prelibati fegati d'oca.*” [Vailati 1906, S III, 293]

► **scarsa interazione fra cultura umanistica e scientifica e eccessivo numero di ore dedicate all'insegnamento della lingua e della letteratura italiana** : “*da una parte cioè **gli artefici della parola armoniosa e vuota, dall'altra gli scienziati dal linguaggio barbaro e dall'animo incolto***”. [Vailati 1900, S III, 263]

► **eccessivo affollamento delle classi**

► **carenza di strutture a supporto dell'attività didattica, quali biblioteche e laboratori** e, soprattutto, la **manca** di buoni manuali scolastici.

La Scuola-laboratorio

- Recensione di: M. Begey *Del lavoro manuale educativo*, 1901 [S III, 264-266]
- *Idee pedagogiche di H. G. Wells*, 1906 [S III, 291-295]



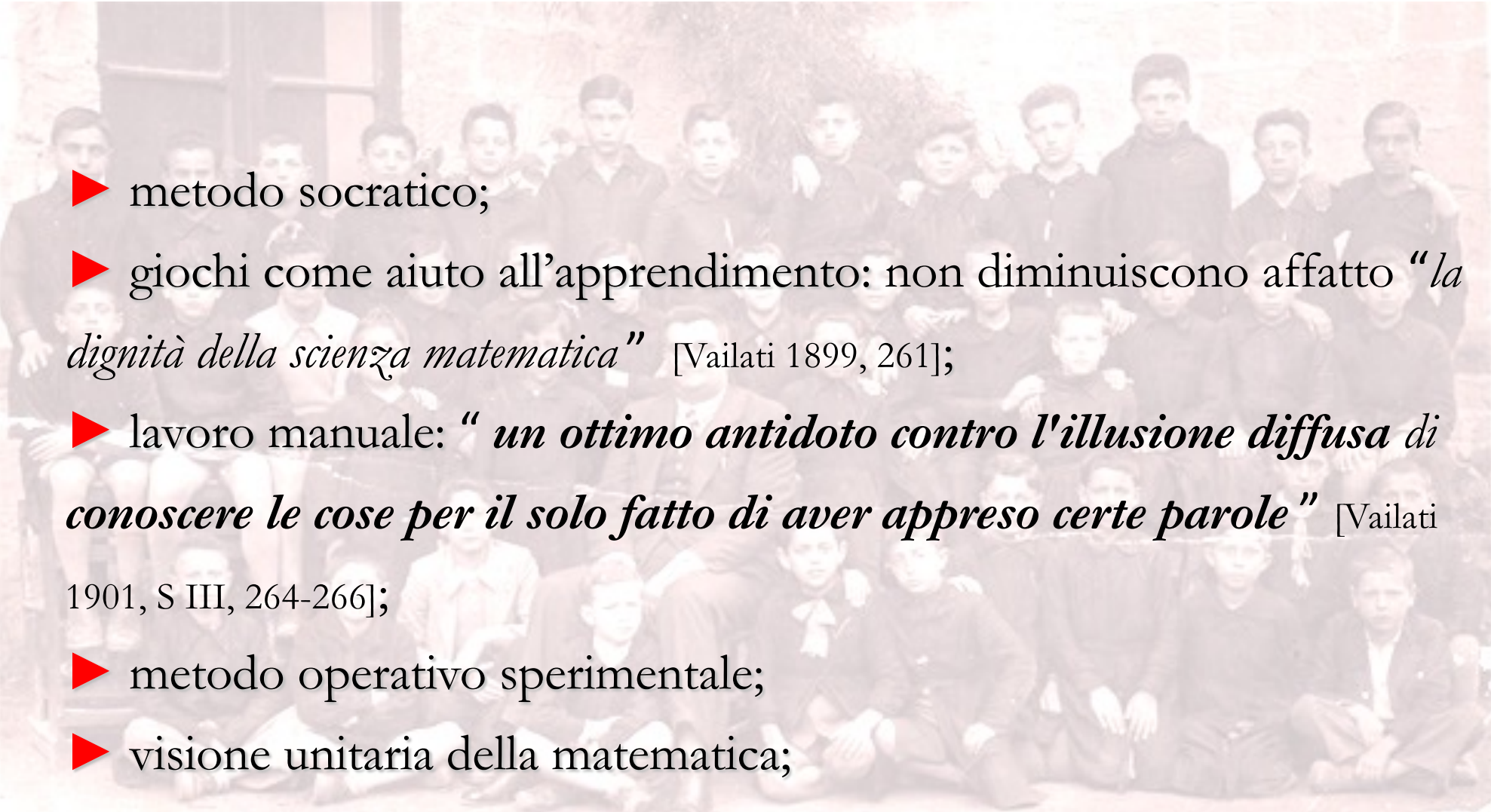
- **Programmi di Matematica**
per la Commissione Reale
- **Note metodologiche**

La scuola-laboratorio proposta da Vailati ha un significato più ampio di quello di Perry:

*“scuola come laboratorio, come luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a **sperimentare e a risolvere questioni, a ... mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà** atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa”* [Vailati 1906, S III, 292],
ma anche a *“ricercare connessioni deduttive”* [1907, S III, 305]

Manca un'esposizione sistematica.

I cardini della scuola laboratorio di Vailati

- 
- ▶ metodo socratico;
 - ▶ giochi come aiuto all'apprendimento: non diminuiscono affatto *“la dignità della scienza matematica”* [Vailati 1899, 261];
 - ▶ lavoro manuale: *“ un ottimo antidoto contro l'illusione diffusa di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso certe parole ”* [Vailati 1901, S III, 264-266];
 - ▶ metodo operativo sperimentale;
 - ▶ visione unitaria della matematica;
 - ▶ uso della storia della matematica per conseguire l'unità del sapere.

Il metodo sperimentale operativo

- dimostrare di *saper fare*, non solo di *saper dire*.

Il disegno, la costruzione delle figure, il ricorso alla carta millimetrata, alla bilancia, ai modelli geometrici possono “*guidare e spingere l'alunno a procurarsi, per via di esperimento ..., il più gran numero possibile di cognizioni sul modo di costruire le figure e sulle loro proprietà, ... far nascere in lui il desiderio e il bisogno di rendersi ragione del «come» e del «perché» tali proprietà sussistano, e di predisporlo a riguardare come interessante l'apprendimento, o la ricerca di connessioni deduttive tra esse*” [Vailati 1907, S III, 305]

Matematica “da praticare”, ma soprattutto matematica da sistematizzare in una teoria.

- Coltivare negli studenti la **fiducia nel metodo deduttivo**
- Mostrare come si possa pervenire a una stessa conclusione **per vie diverse o anche con strumenti matematici differenti.**

Somma dei primi n numeri dispari:
 $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n-1$

- esprime l'ennesimo numero dispari della successione come

$$1 + (n-1) \cdot 2$$

- sfrutta la proprietà che in una progressione aritmetica la somma di due qualsiasi termini equidistanti dagli estremi è eguale alla somma degli estremi,

- ricava facilmente che la somma degli n termini è

$$\frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2$$

1

1 2

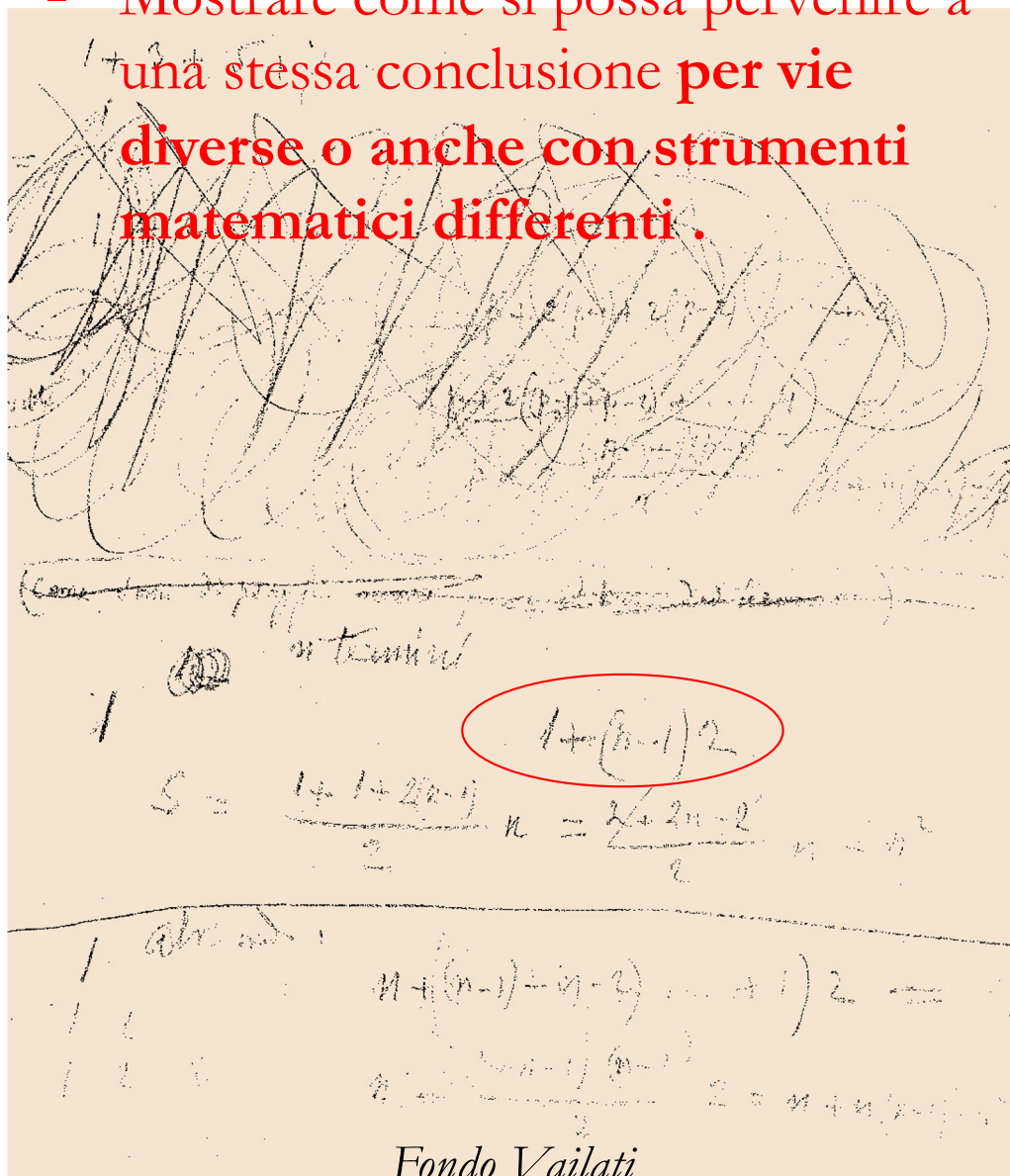
1 2 2

1 2 2 2

...

$$n + (n-1)2 + (n-2)2 + \dots + 2 =$$

$$n + 2 [(n-1) + (n-2) + \dots + 1] = \dots$$



Somma dei quadrati dei primi n
numeri naturali

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$r^2 = r(r+1) - r$

$$(1 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 2) + (3 \cdot 4 - 3) + \dots + (n(n+1) - n)$$

$$(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)) - (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \left(\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= n(n+1) \frac{2n+4-3}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somma dei cubi dei primi n
numeri naturali

$$1^3 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^3 =$$

$$1 + (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2) + (2 \cdot 3 \cdot 4 + 3) + \dots + (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + n$$

$$= (1+2+3+\dots+n) + [(1 \cdot 2 \cdot 3) + (2 \cdot 3 \cdot 4) + \dots + (n-1) \cdot n \cdot (n+1)]$$

$$\approx \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+2)(n+1)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\frac{2n(n+1) + (n+2)(n-1)n(n+1)}{4}$$

$$n(n+1) \cdot \frac{2 + (n^2 - n + 2n - 2)}{4}$$

$$= n(n+1) \cdot \frac{n^2 + n}{4} = \frac{n(n+1)n(n+1)}{4}$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Anzahl per ind.

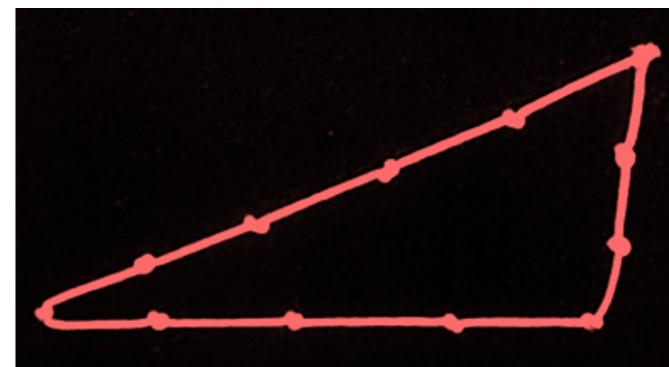
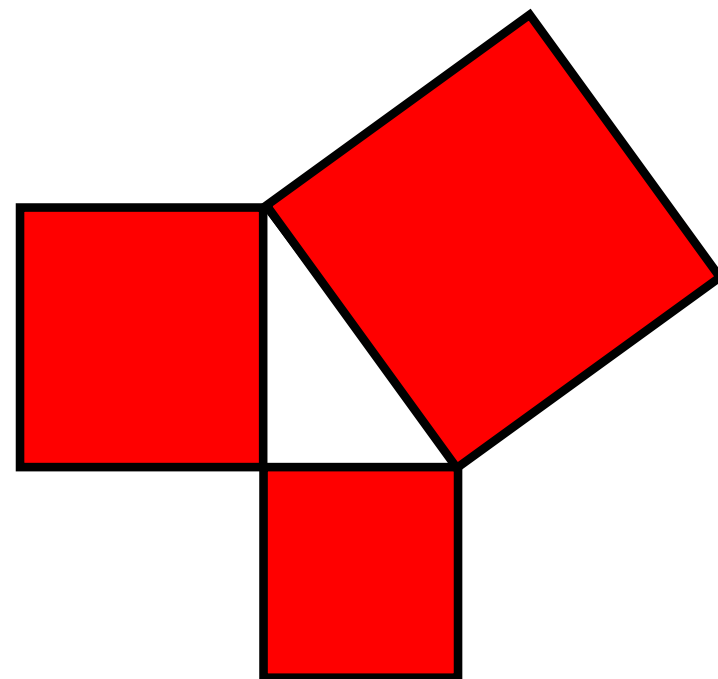
$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$+ (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2}{4} \right) = \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)$$

- Presentare gli enunciati dei teoremi, per quanto possibile, come **problemi**:

*‘Per esempio, il teorema di Pitagora potrebbe vantaggiosamente esser presentato come una risposta al problema di trovare un **quadrato la cui area equivalga alla somma delle aree di due quadrati dati**, o come una risposta alla domanda di **costruire, sul terreno, un angolo retto avendo a disposizione soltanto una corda che si possa dividere per esempio in dodici tratti uguali**’.*

[Vailati 1910, p. 38]

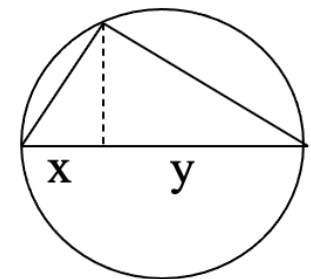


L'unità delle matematiche

► Evidenziare le connessioni fra geometria e algebra

allo scopo di abituare gli allievi ad **affrontare uno stesso problema con vari metodi** e a scegliere, di volta in volta, quello più conveniente. [Vailati 1910, 57]

*“Si pensi per esempio quanto più facilmente l'alunno riconoscerebbe il senso e la portata di una proposizione come questa: che **la media geometrica di due numeri non può mai superare la loro media aritmetica**”, quando gli si facesse osservare che, in un circolo avente per diametro la somma di due segmenti, la seconda è rappresentata dal raggio, e l'altra invece dalla **metà di una corda**”* [Vailati 1909, 487]



$$\frac{x+y}{2} \quad \sqrt{x \times y}$$

► ... fra aritmetica e algebra

Abituare a **tradurre in equazioni gli enunciati** dei problemi e, dopo averle risolte, a **ritradurre in parole le formule** via via ottenute.

Scopo: vedere l'**algebra** come una nuova forma di linguaggio in grado di *“ridurre domande o problemi originariamente complicati, a forma tanto semplice da non esigere quasi più alcuno sforzo mentale per la loro risoluzione”*. [Vailati 1910, 40, Vailati a Vacca, EV, 207]

Importanza della storia della scienza per conseguire l'unità del sapere

▶ dialogo fra cultura umanistica e scientifica

▶ funzione didattica

- *spedantizzare l'esposizione* [Vailati a Vacca, 25.5.1901, EV, 187].

- *rendere l'insegnamento più **proficuo** e nello stesso tempo più **gradevole**, più **efficace** e insieme più **attraente**.* [Vailati 1897, S II,10]

▶ ruolo educativo e formativo:

antidoto contro ogni forma di dogmatismo.

Lecture commentate di passi dei classici della scienza in classe.

Vailati stesso leggeva ai suoi studenti passi tratti dagli *Elementi* di Euclide [*Fondo Vailati*].

1909 - fu pubblicato il progetto di riforma della Commissione Reale

Fattori che impedirono l'affermarsi del laboratorio di matematica

- ▶ Nel maggio 1909 Vailati morì
- ▶ La riforma proposta dalla Commissione Reale **non fu mai realizzata**
- ▶ Vailati **non diede mai un'esposizione sistematica delle sue idee**
- ▶ Non tutti (matematici e insegnanti) condividevano questo approccio
[Bollettino della Mathesis, 1908-1910]
- ▶ Non furono pubblicati libri di testo conformi
- ▶ La Riforma Gentile (1923) rese le **discipline umanistiche** l'asse culturale della nazione e soprattutto della scuola secondaria.

... negli anni Quaranta e Cinquanta l'idea di laboratorio di matematica sarà ripresa da Emma Castelnuovo e dai matematici e pedagogisti della *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIAEM)*

Esempi di didattica laboratoriale della matematica Montessori, Castelnuevo, de Finetti



Maria Montessori

(1870 - 1952)



Maria Tecla Artemisia Montessori, medico, educatrice, pedagoga, è internazionalmente nota per il metodo educativo che da lei prende il nome.

1896 - terza donna italiana a laurearsi in medicina (Roma, specializzazione in neuropsichiatria).

Si accosta ai movimenti femminili

e partecipa ai congressi internazionali di **Berlino (1896)** e di **Londra (1899)** parlando dell'istruzione delle donne in Italia e della condizione di lavoro delle maestre.



*«Erano donne nuove, ben lungi dal rassomigliare al tipo così poco simpatico che gli uomini, ignoranti del tutto i principi del femminismo, classificarono col nome di terzo sesso... donne cioè piangenti sulla loro sorte; critiche spietate e malevoli dell'uomo... Zitelle brutte e schizzanti dal cuore sterile il veleno dell'astinenza forzata... **Erano donne nuove, ... donne che lavorano al progresso sociale che contribuiscono all'universale benessere.***

[Montessori 1899, 854]

Scienza come **strumento di democratizzazione, di emancipazione sociale e civile**



Impegno per una **nuova pedagogia.**

1904 - libera docenza in antropologia

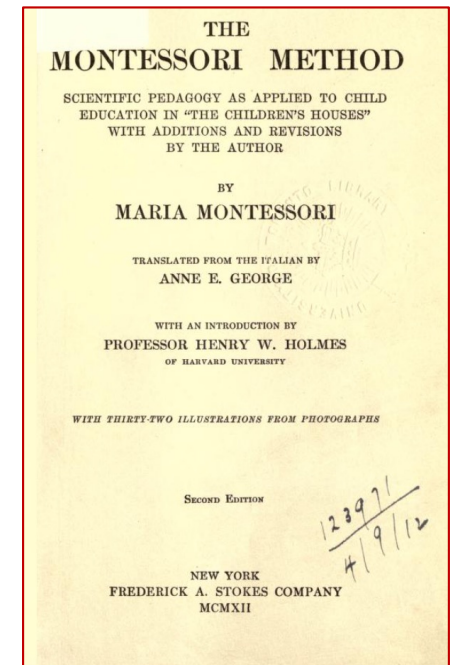
1907 - nel quartiere San Lorenzo di Roma apre la prima *Casa dei Bambini*, dedicata non solo ai bambini portatori di handicap, e qui applica una nuova concezione di scuola d'infanzia.

*Teniamo gli scolari in iscuola compressi tra quegli strumenti degradanti il corpo e lo spirito che sono: il banco, e il premio e i castighi esteriori, al fine di ridurli alla **disciplina dell'immobilità e del silenzio** ... Veramente oggi si impone ... il **rinnovamento di metodi per l'educazione e per l'istruzione: chi lotta per questo, lotta per la rigenerazione umana.*** [Montessori 1909, II ed 1951, 19]

1909 – pubblica *Il metodo della pedagogia scientifica*, tradotto in varie lingue

1913 – 1924 Stati Uniti, Spagna (diffusione del metodo montessoriano)

1924 – sono create la “*Scuola Magistrale Montessori*” e “*l'Opera Nazionale Montessori*”. Maria Montessori presidente onoraria.



Ottiene l'appoggio di **Mussolini**, interessato a risolvere il problema dell'analfabetismo e anche a trarre vantaggi dal prestigio internazionale della Montessori.



I rapporti con il fascismo di deteriorano

1934 – vengono chiuse le scuole Montessori

1936 – l'*Opera Nazionale* è chiusa dal governo fascista.

Maria lascia l'Italia e gira il mondo (Spagna, Inghilterra, Olanda, India) per diffondere il suo metodo educativo.

1947 – rientra in Italia e ricostituisce l'*Opera Nazionale*.

6 maggio 1952 – muore a Noordwijk, nei Paesi Bassi.



L'importanza dei materiali

MM elabora il suo metodo educativo a partire dallo studio dei bambini con problemi psichici o ritardati e lo estende poi a tutti i bambini:

Distacco dalle teorie educative precedenti:

- *attenzione al bambino* e alla sua spontanea capacità di apprendere: il bambino deve essere *libero di agire, di muoversi, di pensare, di costruire se stesso*
- importanza di un *ambiente appositamente pensato*,
- importanza di *materiali* che favoriscano il suo sviluppo neurologico, psichico ed emotivo: *palestra per la ginnastica dello spirito*.



- I materiali montessoriani per la maggior parte sono realizzati in **legno**;
- Sono dipinti con **colori vivaci** in modo da attrarre l'interesse dei bambini;
- Le **dimensioni** tengono conto delle dimensioni del bambino;

Il bambino, lavorando con le mani, è **protagonista** di quello che sta facendo, l'esperienza percettiva e manipolatoria lo guida **a fare scoperte**. La **scoperta** è il motore fondamentale dell'apprendimento.

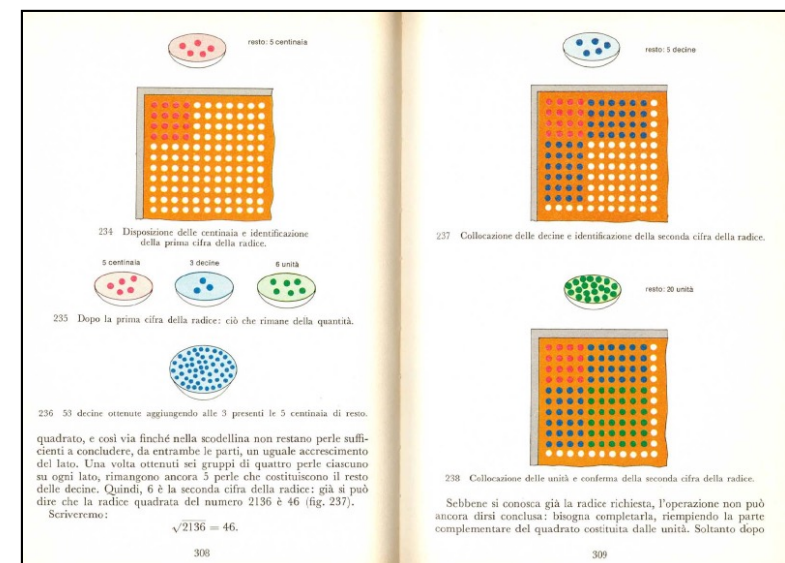
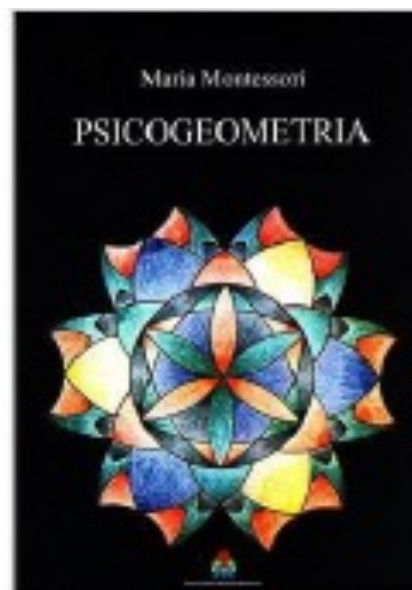
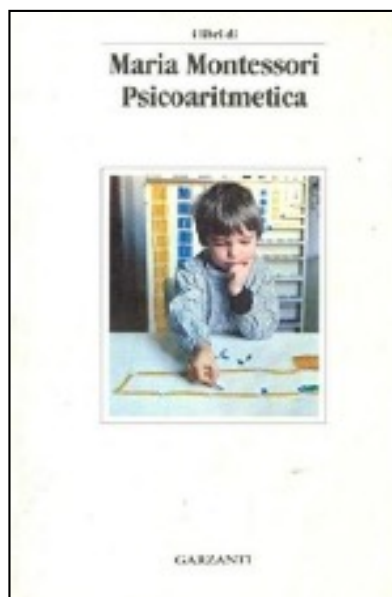
Emma Castelnuovo: lo scopo della Montessori era quello di suscitare *nel bambino un'intuizione materiale che lo conduca a passare da una concezione concreta all'astrazione* [...] è in questo senso che Maria Montessori ha apportato un elemento nuovo all'insegnamento intuitivo per immagini, un elemento nuovo che **autorizza a classificare il suo fra i metodi attivi**. [E. Castelnuovo 1957, p. 95]



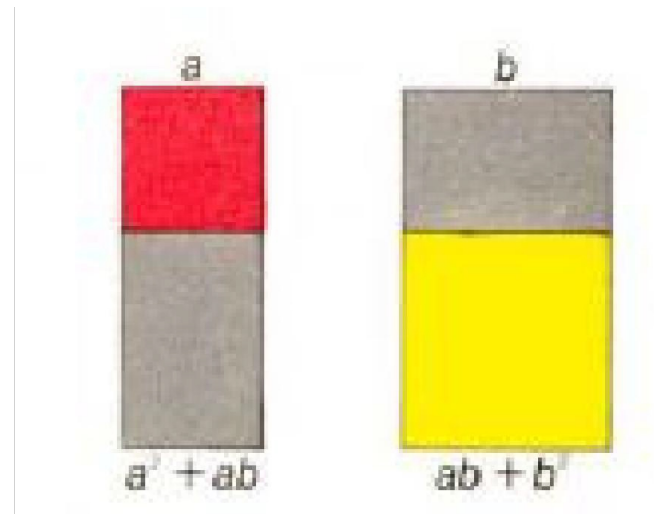
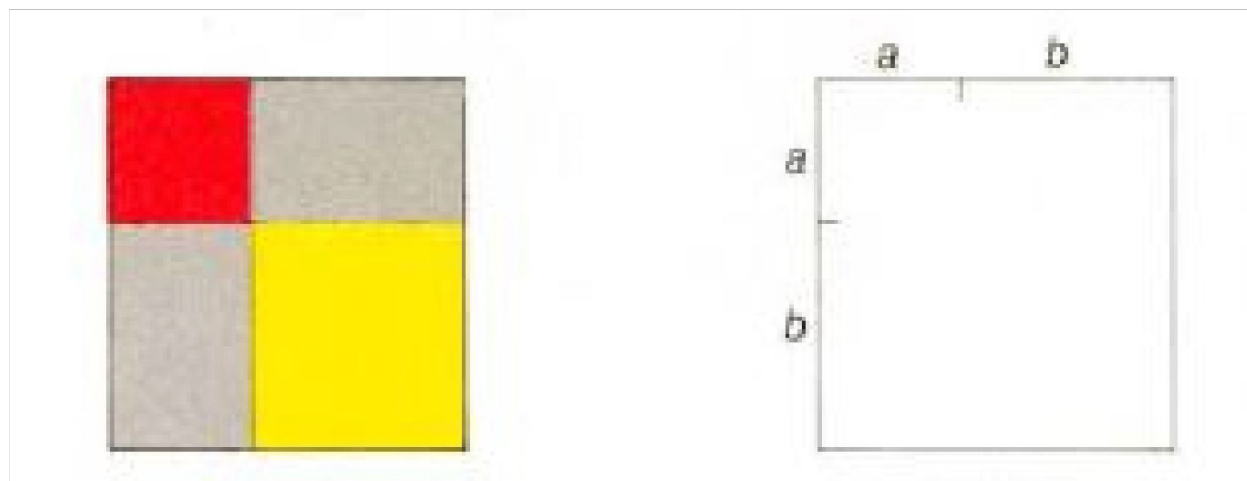
- *Psico-Aritmética*, Barcelona, Araluce, 1934
- *Psicoaritmetica*, Milano, Garzanti, 1971
- *Psico-geometría*, Barcelona, Araluce, 1934
- *Psicogeometria*, Roma, Edizioni Opera Nazionale Montessori, 2011



Aritmetica e Geometria sono strettamente connesse e concorrono allo sviluppo psichico equilibrato del bambino.



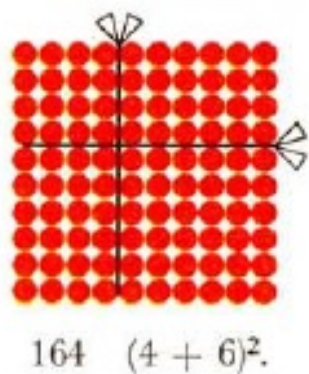
*Da un quadrato ad un altro quadrato
in Psicoaritmetica, pp. 260-265*



$$\begin{aligned}
 & (a+b)(a+b) = \\
 & = (a+b)a + (a+b)b = \\
 & = aa + ba + ab + bb = \\
 & = a^2 + ba + ab + b^2 = \\
 & = a^2 + 2ab + b^2.
 \end{aligned}$$

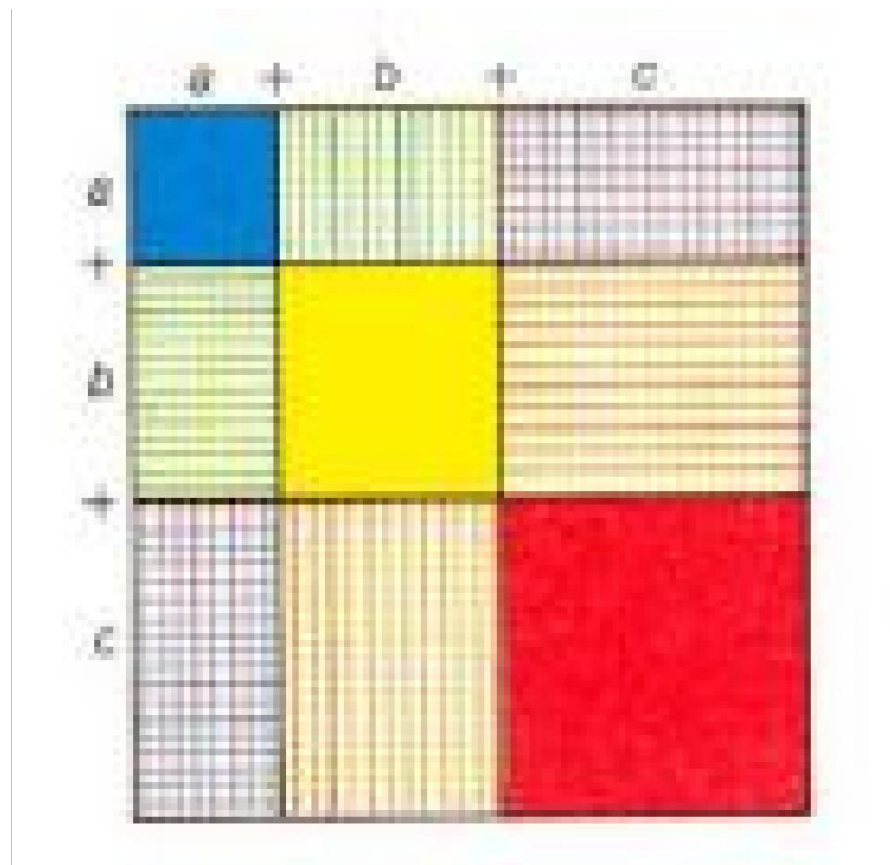
Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Con i bambini più piccoli : le perline
Con i ragazzi : carta colorata, forbici, disegno

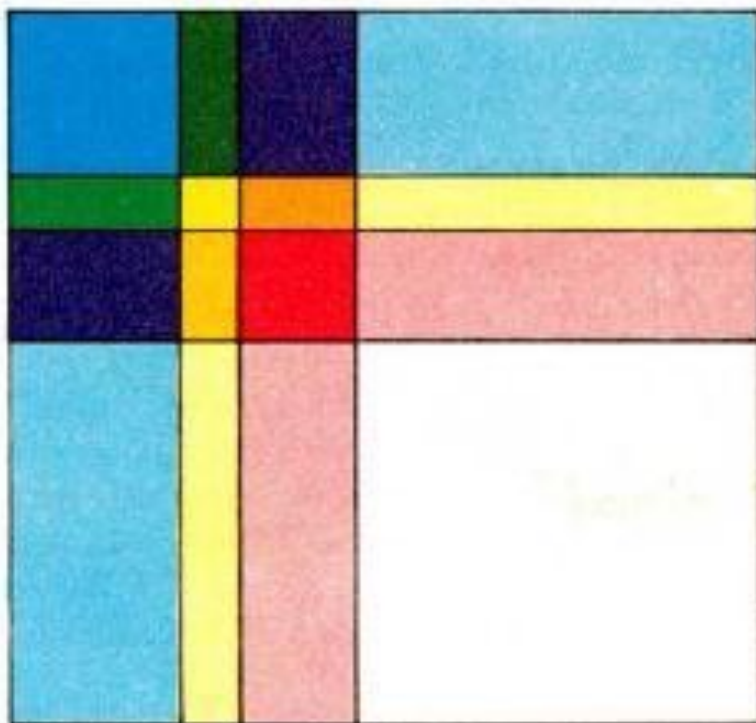
Quadrato di un trinomio



$$\begin{aligned} & (a + b + c)(a + b + c) = \\ & = a^2 + ba + ca + \\ & + ab + b^2 + cb + \\ & + ac + bc + c^2. \end{aligned}$$

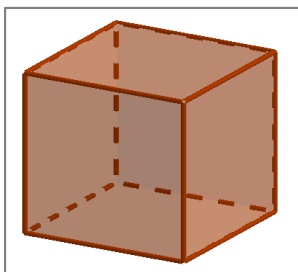
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2cb$$

Quadrato di un quadrinomio

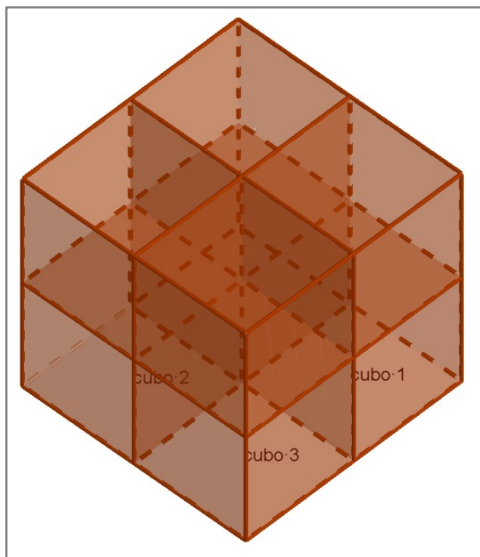
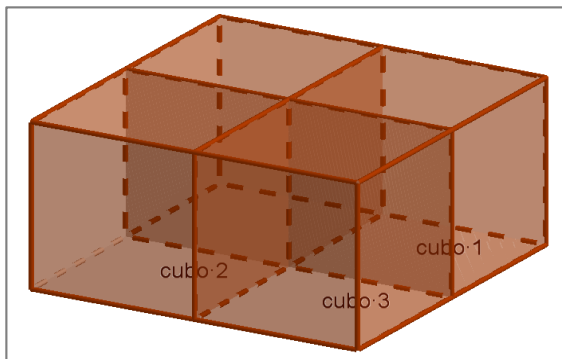
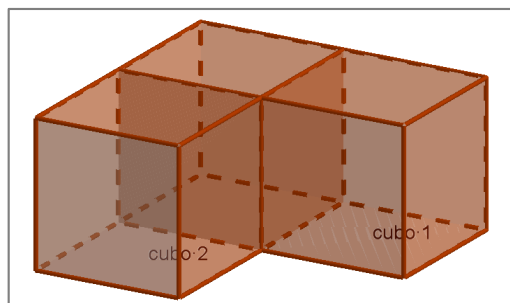
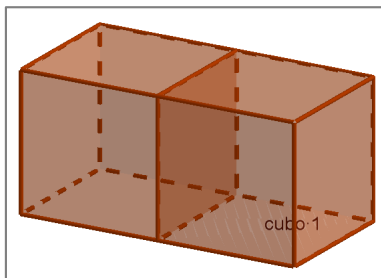


$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Dall'esercizio con la torre rosa al cubo del binomio



Cubo di lato 1



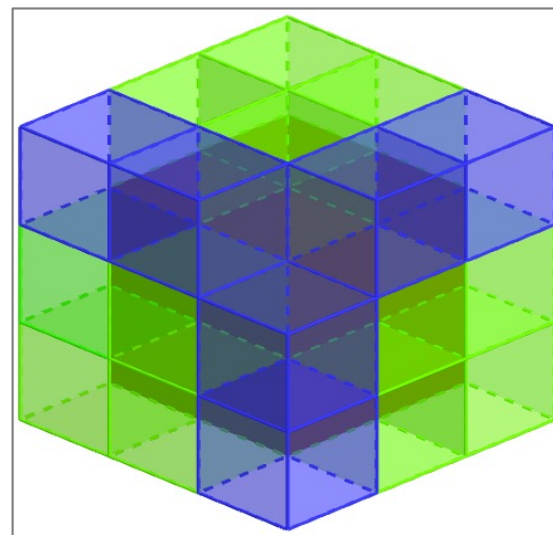
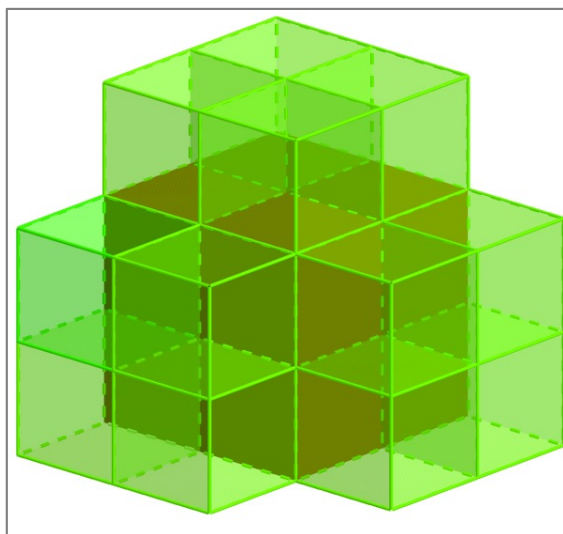
Cubo di lato 2:
8 cubetti unitari



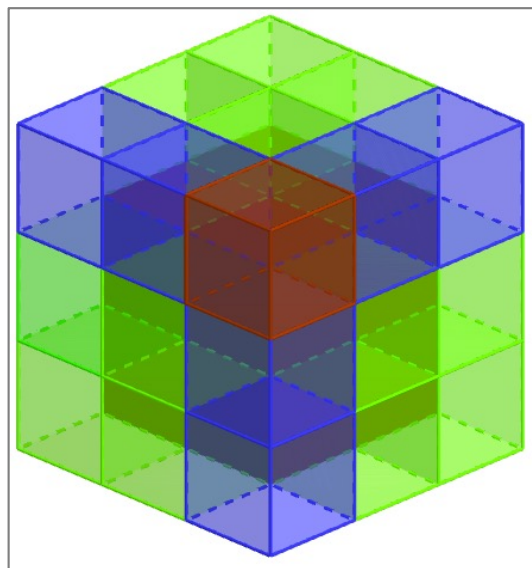
Torre rosa

Psicoaritmetica, pp. 268-277

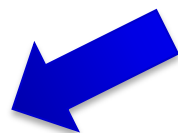
Costruzione del terzo cubo della *Torre rosa* partendo dal secondo:



Torre rosa



$a = 2$ e $b = 1$

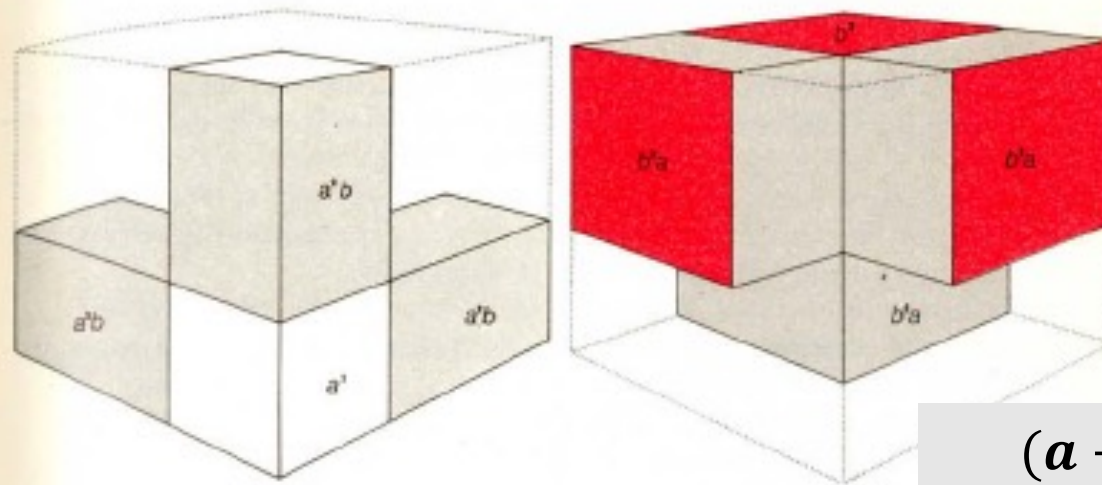


La disposizione delle parti ed il ripetersi dei procedimenti conducono alla formula del *cubo di binomio*:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cubo di spigolo 3: 27 cubetti unitari

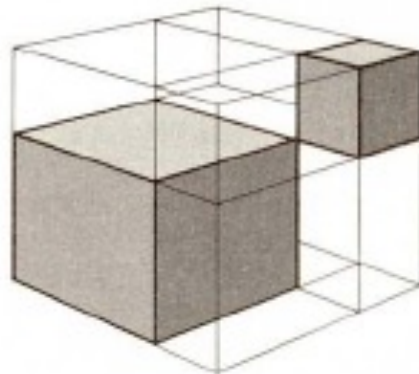
che indica la presenza e insieme la disposizione delle parti costituenti il cubo di un binomio.¹⁵



203 $a^3 + 3a^2b$.

204 $b^3 + 3b^2a$.

Per « veder dentro » nella formula, abbiamo fatto costruire gli otto pezzi costituenti il cubo del binomio con due diversi materiali: di legno nero i due cubi e di cristallo trasparente i sei prismi.



205 L'esplorazione della formula.

¹⁵ Infatti: il cubo di un binomio è il quadrinomio i cui termini sono: il cubo del primo monomio, il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo, il cubo del secondo monomio.

«vedere dentro» la
formula del cubo del
binomio

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Emma Castelnuovo sul metodo Montessori (1957):

*«L'intuizione nel metodo Montessori non è dunque solo percezione passiva di un'immagine o di un materiale, ma è anche **costruzione** ...»*

Nel metodo Montessori invece l'esperienza matematica non si esercita su fenomeni che variano con continuità, ma si procede a sbalzi; siccome però si lavora su un materiale artificiale, si può estrapolare, ci si può cioè a un certo punto distaccare dal materiale, idealizzandolo. Per esempio si può, lavorando con le aste rosse e blu, pensare di aggiungere sempre un'asta ancora e così arrivare all'idea di infinito.

Emma Castelnuovo

(1913 - 2014)



Nasce il 12 Dicembre 1913 a Roma, figlia di Guido Castelnuovo e Elbina Enriques (sorella di Federigo Enriques).

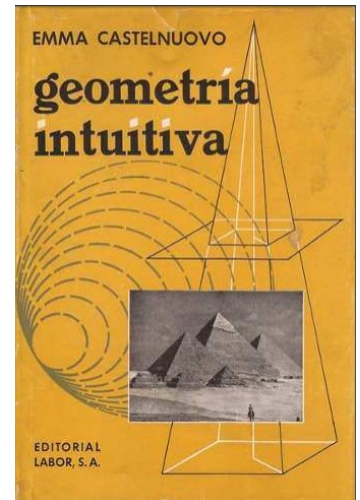
Nel **1936** si laurea presso l'Università di Roma discutendo una tesi di geometria algebrica.

Dal **1938**, a causa delle leggi razziali non può occupare la cattedra nella scuola secondaria per cui aveva appena vinto il concorso.

Dopo la liberazione di Roma Emma ottiene la cattedra di matematica della scuola media statale “Torquato Tasso” di Roma.

Agli inizi del **1945** crea insieme a Tullio Viola **Istituto Romano di Cultura Matematica** per la formazione degli insegnanti.

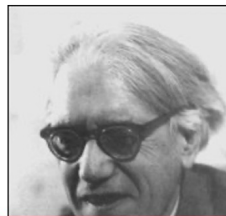
Nel **1948** pubblica il libro *Geometria intuitiva* una sorta di manifesto del suo pensiero didattico.



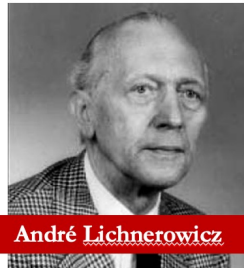
Hans Freudenthal



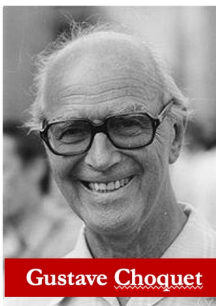
Caleb Gattegno



Ferdinand Gonseth



André Lichnerowicz



Gustave Choquet



Evert W. Beth



Jean Piaget

1951 - EC diventa membro della **CIEAEM** (*Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*) su invito di Caleb Gattegno.

1979 – 1981 è presidente della CIEAEM

Non presentate la matematica come qualche cosa già fatta, qualche cosa che voi conoscete ed essi [gli studenti] non sanno. Stimolate i loro interessi su argomenti che essi possano sentire, possano vivere; fate nascere le teorie a partire dal concreto, dalla realtà, anche se insegnate ad allievi già grandi. Per tutto questo occorre studiare, leggere, pensare, ricostruire. [EC 1981, p. 355]

I modelli dinamici e un nuovo modo di insegnare la geometria intuitiva



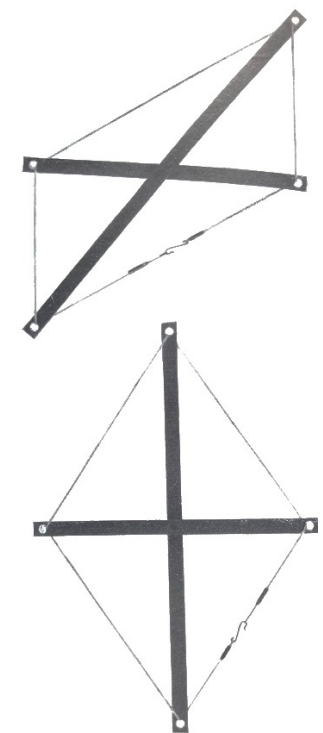
1958 - appare il volume *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* della CIEAEM. Traduz. italiana: 1965

E. Castelnuovo, *L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva* [EC 1965, pp. 41-65]

I modelli e gli strumenti dovrebbero essere mobili, costruiti e manipolati dagli studenti in modo da diventare strumenti di scoperta : *È infatti la mobilità che attira l'attenzione del bambino e che lo conduce dal concreto all'astratto; perché non è il materiale in sé che è l'oggetto della sua attenzione, ma piuttosto la trasformazione del materiale, un'operazione dunque [...] astratta.* [EC 1965, p. 58].

1963 – *Didattica della matematica*, Firenze, La Nuova Italia trad. in tedesco, spagnolo, ...

2007 – *Lectio magistralis: Insegnare Matematica*, Festival della Matematica di Roma, [LINK](#)



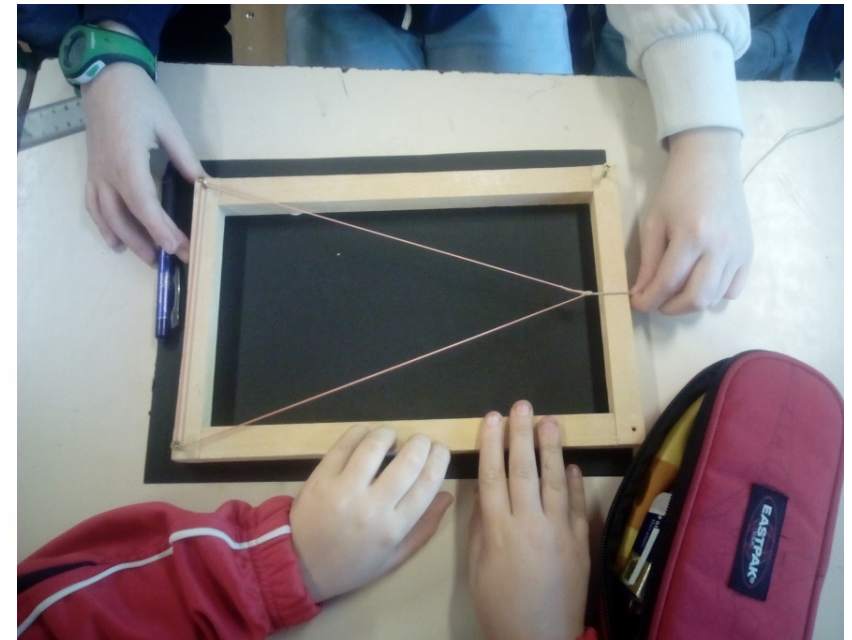
Didattica della matematica,
1963, Tav. VI

Somma degli angoli di un triangolo. Vogliamo che gli allievi fissino l'attenzione sugli angoli di un triangolo, osservino i tre angoli, e che questa osservazione nasca spontaneamente. Ora, gli angoli, come i lati, come qualunque elemento di una figura, non vengono osservati se la figura è statica; l'osservazione nasce non appena c'è una variazione. Il confronto di due triangoli o di alcuni triangoli potrà far dire che questo angolo è maggiore di quello o che alcuni angoli sono uguali, ma è un'osservazione che non dice nulla, che non porta a nulla. Per far sì che l'osservazione sia costruttiva nel senso matematico della parola occorre considerare infiniti casi, occorre vedere un caso insieme ai precedenti e a quelli che lo seguono; in breve, occorre far muovere la figura per gradi insensibili. Questo si potrebbe, naturalmente, realizzare con un film (cartone animato), ma si può anche ottenere molto semplicemente con un dispositivo che ogni bambino può costruire da sé: prendete una tavoletta di legno (per esempio di forma rettangolare) e piantate due chiodi *A* e *B* come nella fig. 2. Fra i chiodi tendete un elastico; legate poi nel punto di mezzo di un ramo di quest'elastico un filo resistente e tirate in



Fig. 2. Dispositivo che conduce all'intuizione della proprietà della somma degli angoli di un triangolo.

La somma degli angoli interni di un triangolo



E. Castelnuovo, *L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva* 1965, pp. 49 -51.

https://claudio.fontanari.maths.unitn.it/EMMA/materiale_insegnamento_1965.pdf

direzione perpendicolare alla congiungente dei due chiodi. Otterrete un triangolo isoscele, anzi tanti triangoli isosceli¹. Dite ai bambini di osservare tutti questi triangoli e di scrivere le loro impressioni. Essi saranno colpiti da due fatti: 1) solo la base rimane sempre la stessa; 2) tutti questi triangoli sono isosceli. Vi diranno: cambia l'altezza relativa alla base, cambia l'area e anche il perimetro; ma tutti scriveranno anche che cambia l'ampiezza degli angoli e che se si immagina di partire dal triangolo più alto (il massimo che si può realizzare sulla tavoletta) e di allentare lo spago a poco a poco, l'angolo al vertice diventa più grande e gli angoli alla base diventano a mano a mano più piccoli. Tutti osserveranno che a un certo punto si ha un triangolo equilatero (e in questo caso guardano i lati) e qualcuno vi dirà che a un dato istante l'angolo al vertice diventa retto ($\hat{ACB}$). Ma non c'è allievo a cui sfuggirà il caso limite; diranno: «alla fine gli angoli alla base diventano piccolissimi e quello al vertice molto ottuso e poi... il triangolo sparisce, diventa un segmento, la base. Allora gli angoli alla base non esistono più, ma quello al vertice è diventato un angolo piatto». Ricominciate la variazione in senso opposto e dite di osservare ancora gli angoli. Ecco: gli angoli alla base aumentano, quello al vertice diminuisce. Dite poi loro di pensare a una tavoletta molto più alta di quella che avete in mano, talmente alta da non potersi nemmeno realizzare. Vi diranno che l'angolo al vertice diventa sempre più acuto e che quelli alla base diventano quasi retti.

Vi diranno che quando un angolo diminuisce, gli altri aumentano e che — si è sempre portati, anche con

¹ Se richiamo l'attenzione degli allievi soltanto sul triangolo isoscele è perché nel caso generale l'attenzione del bambino sarebbe dispersa da una quantità di circostanze e non arriverebbe mai a fissarsi su questa o quella proprietà. È evidente che in seguito si passerà al caso generale.

una certa leggerezza, a vedere un qualche cosa di costante — quello che si perde in un angolo viene compensato da quello che si guadagna negli altri. Non è forse questa un'intuizione della proprietà sulla somma degli angoli del triangolo? La somma degli angoli è dunque costante; ma, quale è questo valore costante? I casi limiti conducono a intuire questo valore.

Chiediamoci quale è la funzione del materiale in questo caso. Abbiamo fatto variare una figura per gradi insensibili, esperienza irrealizzabile col solo disegno. Questa esperienza si può idealizzare, cioè si può estrapolare immaginando che il vertice si allontani all'infinito o che si avvicini sempre più alla base. Ma, voglio insistere sul fatto che è proprio la variazione degli angoli che attira l'attenzione sugli angoli, cosa che non si può ottenere da una figura statica, e che sono proprio i casi limiti che, "smaterializzando" il materiale, lo fanno idealizzare e conducono all'intuizione della verità. È certo che questa esperienza, come del resto tutte quelle realizzate con procedimenti di continuità, ha un pericolo, il pericolo del caso limite, quello cioè di generalizzare la proprietà che si legge nel caso limite. Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore (e non mancano esempi anche elementari dove si mette in evidenza come la continuità conduca a un errore), sia benedetto questo errore! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza.



Disponiamo una qualunque sorgente luminosa puntiforme S a una certa distanza da uno schermo e ; fra S ed e poniamo un triangolo in cartone, T , sostenuto da un sottile ferro contenuto nel piano del triangolo e conficcato in A su un supporto orizzontale in modo da poter assumere una qualunque posizione della stella di centro A . In particolare, si potrà far ruotare il ferro nel piano perpendicolare allo schermo; il triangolo sarà poi fissato al ferro in modo che in una delle sue posizioni possa risultare parallelo allo schermo.

Nella fig. 3 i triangoli T e T' sono simili (T essendo parallelo allo schermo), mentre i triangoli $\bar{T}$ e $\bar{T}'$ non lo sono.

Noi vogliamo insistere solo sul fatto che la similitudine così introdotta viene ad occupare il posto che le compete: viene a presentarsi, cioè, come un caso particolare e particolarmente interessante fra le corrispondenze prospettive.

EC, *L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva* 1965, pp. 53-55.

https://claudio.fontanari.maths.unitn.it/EMMA/materiale_insegnamento_1965.pdf

La similitudine

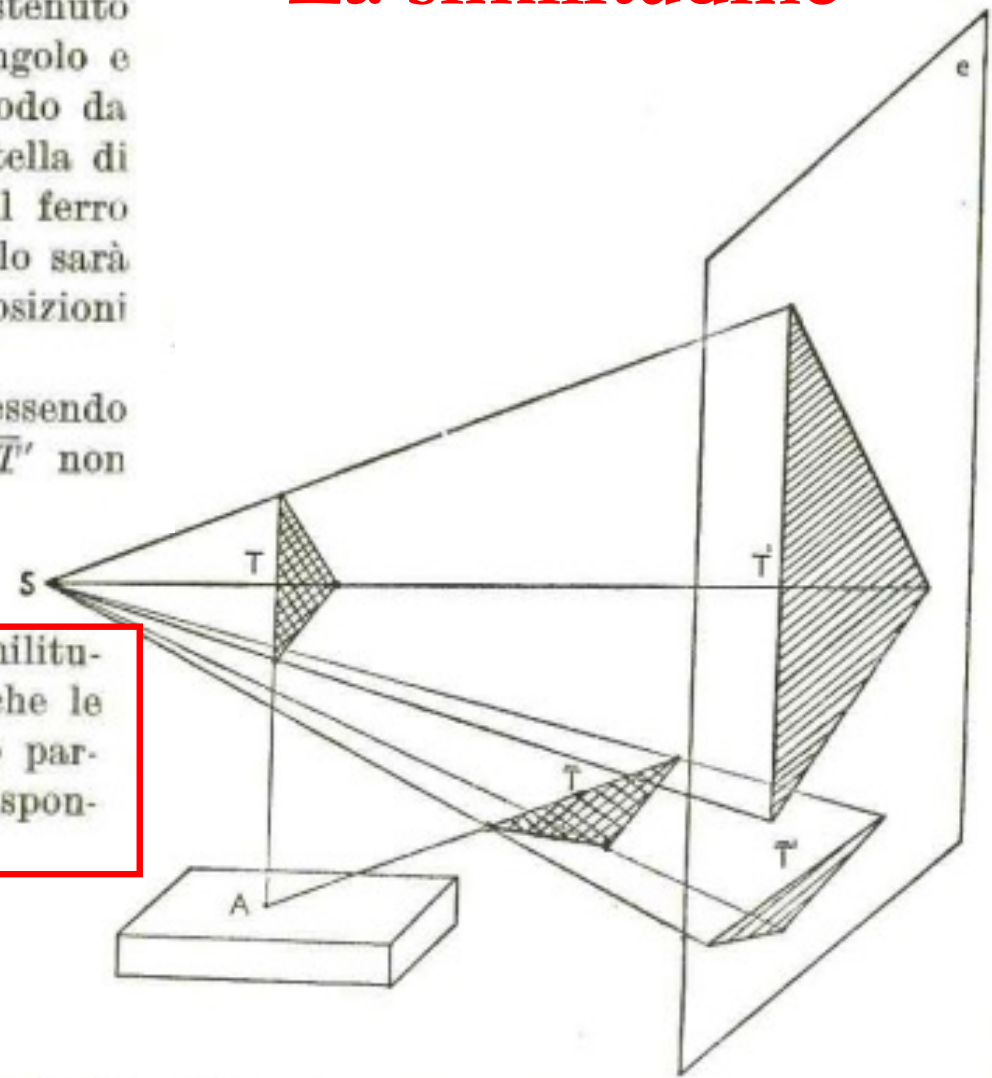
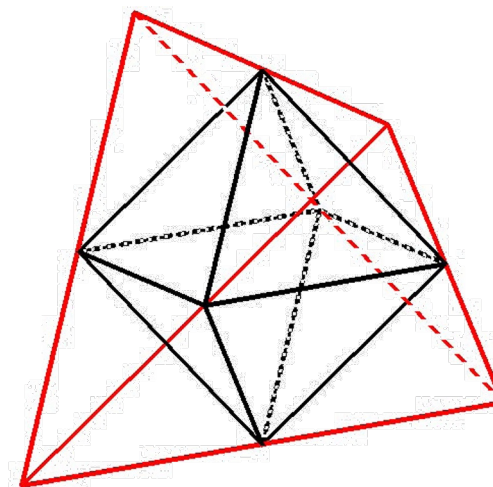
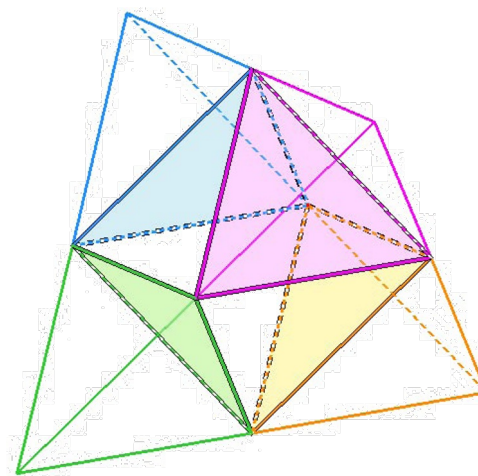
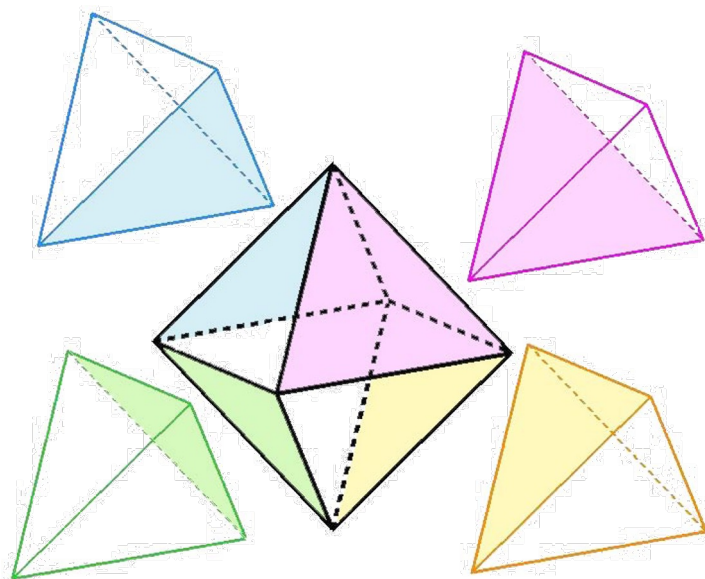
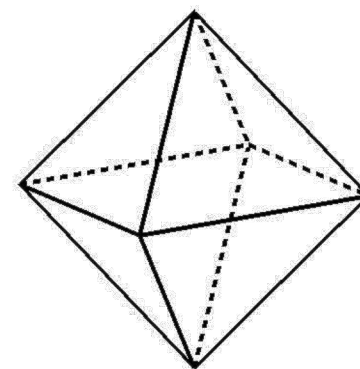


Fig. 3. La similitudine, come un caso particolare tra le corrispondenze prospettive è messa in evidenza dall'osservazione dell'ombra di un triangolo.

L'intuizione di un allievo di Emma di scuola media

Studente di 13 anni che nell'anno scolastico 1964-65 frequentava la terza media della scuola "T. Tasso" di Roma.

Individuò un metodo più semplice di quello tradizionale per calcolare il volume di un ottaedro.



$$\text{Ottaedro} + 4 \text{ Tetraedri} = 8 \text{ Tetraedri}$$

$$\text{Ottaedro} = 4 \text{ Tetraedri}$$



Bruno de Finetti

(Innsbruck 1906- Roma 1985)

Si laurea con lode in Matematica applicata a Milano il 27 novembre **1927**.

Lavora presso l'Ufficio matematico dell'Istituto Centrale di Statistica di Roma di Corrado Gini fino al 1931.

Dal 1931 al 1946 lavora alle Assicurazioni Generali di Trieste dove diventa Capo del Servizio Meccanografico

Nel 1946, passa all'insegnamento universitario a **Trieste** e poi nel **1954** all'Università di **Roma**, ove ricopre la cattedra di Matematica Finanziaria fino al 1961, anno in cui ottiene la cattedra di Calcolo delle Probabilità alla Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali.

Importanti contributi alla **Probabilità** (impostazione soggettiva), alla Statistica, all'Analisi, all'Economia.

Profondo interesse per la **Didattica della matematica** (membro della CIIM, presidente della Mathesis, direttore del periodico di Matematiche, ...)

IL "SAPER VEDERE" IN MATEMATICA

1. RIFLETTERE PER GIUNGERE A UN RISULTATO

La matematica richiede anzitutto immaginazione e interesse per vedere direttamente i problemi, e allora è istruttiva e anche divertente. Perché i giovani se ne persuadano, e conservino anche da grandi il vantaggio di saperli regolare in ogni circostanza offrendo gli aspetti matematici e logici dei problemi che dovranno affrontare nella vita, basta che si abituino a riflettere, a rendersi conto del senso e del valore e dell'utilità di ciò che fanno. La matematica sembra e diventa arida e odiosa soltanto se, lasciando in ombra gli scopi cui risponde, si riduce a passiva accettazione di nozioni, metodi, formalismi.

Giovane soprattutto riflettere su esempi, imparare a riflettere su esempi scelti ed a modificarli o costruirne di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ciò che occorre saper vedere per dominare un problema. Cominciamo da tre esempi effettivi, di epoche molto diverse, che possono servire da utile spunto.

Platone: Socrate e lo schiavo.

Il primo esempio è contenuto in un celebre passo di Platone (filosofo greco, 427-347 avanti Cristo), e precisamente nel dialogo *Menone*: Socrate interroga

uno schiavo, chiedendogli di raddoppiare un quadrato (cioè: di costruire un quadrato di area doppia di quello dato). Dapprima lo fa accorgere che se raddoppiasse il lato (come a prima vista aveva detto) l'area risulterebbe non *doppia* ma *quadrupla*, ed infine, incoraggiandolo ancora a pensare e guardare la figura disegnata (fig. 1) per trovare un quadrato

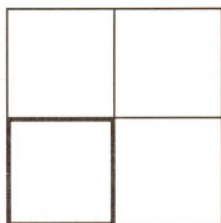


FIGURA 1.

Avvertenza. Nel testo si trovano a volte dei richiami (EP) o (NB), in genere seguiti (ove occorre) da un numero (EP, 5), (NB, 4) ed anche (NB, 4, p. 29). Significano rinvio agli ESERCIZI E PROBLEMI (numerati) e rispettivamente all'elenco (numerato) di opere citate nella NOTA BIBLIOGRAFICA (con eventuali indicazioni aggiuntive (numero di pagina, o, per riviste, anno, ecc.).

Cardini del pensiero didattico di de Finetti

- **Insegnare per problemi**

Ciò che occorre è suscitare interesse e curiosità con visioni ampie e suggestive, insegnare, più “per problemi che per teorie”, usare ogni metodo utile ad ampliare le prospettive.

[BdF 1971, p. 99]

- **Il saper vedere**

L'effetto che conta, dell'insegnamento, non consiste nel saper ripetere le cose studiate, ma nell'acquistare una certa padronanza e capacità nel vedere e affrontare problemi, nel tentare di ragionarvi sopra. [BdF 1960, p. 15]

- **Il fusionismo**

Per sviluppare l'intelligenza, occorre tendere a superare la mancanza di collegamenti esistenti fra le materie e perfino fra le diverse parti di una stessa materia, cercando che i giovani pervengano a fondere i vari elementi in una visione organica propria. [BdF 1960, p. 16].

Cosa direste di chi acquistasse le parti occorrenti per mettere insieme un'automobile ... e invece le conservasse inutilizzate, vuoi trascuratamente in disordine, vuoi esposte in bell'ordine in una vetrina? Perciò diciamo che capire significa collegare. [BdF 1967, p. 13]

- **Legame con la realtà**

"Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà. È in questo spirito che riesce possibile presentare la Matematica nella forma più straordinariamente ricca e affascinante " [BdF 1976, p. 43]

E farla comprendere significa anzitutto farla amare, farla sentire non avulsa dai pensieri e meditazioni e preoccupazioni d'ogni giorno, ma ad essi siffattamente frammista da far apparire all'opposto arido e opaco il pensiero che non sappia attingere alla sua luce. [BdF, Matematica Logico Intuitiva, p. X]

- **Valorizzazione dell'intuizione**

“Un altro preconetto ... è per molti la preoccupazione di ‘bandire l'intuizione, perché talvolta induce in errore. La preoccupazione può essere giustificata in delicate questioni di critica dei principi; fuori di tali situazioni eccezionali è ben maggiore il rischio di errare per mancanza dell'intuizione. Volerla bandire sarebbe come cavarci gli occhi perché esistono le ‘illusioni ottiche’ senza sospettare che la cecità abbia pure qualche inconveniente” [BdF 1965, p. 133].

- **«Aprire molte finestre nell'immenso orizzonte matematico»**

- **Cambiare il modo di esaminare**

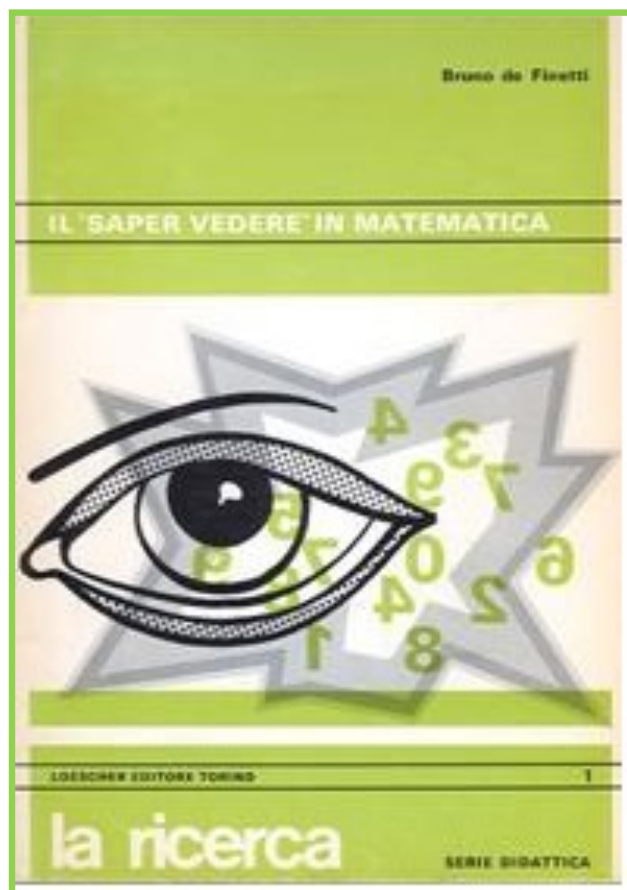
“basterebbe far consistere la prova scritta, anziché nel solito tema stereotipato ma macchinoso, in una serie di domandine e problemini facili ma variati e significativi”
[BdF 1965, p. 327].

- **Consiglio agli insegnanti**

*“È meglio impiegare [il tempo] per svolgere programmi massacranti con metodo inevitabilmente scolastico mnemonico passivo pedestre, oppure sfruttarlo per dare poche ma buone spinte, che sveglino, stimolino *aguzzino l'intelligenza e la fantasia affinché affiancate spicchino il volo alla conquista dell'avvenire?*”*
[BdF 1957, p. 69]

BdF, *Il "saper vedere" in matematica*, Torino, Loescher, 1967

La matematica richiede anzitutto immaginazione e interesse per vedere direttamente i problemi, e allora è istruttiva e anche divertente. [SVM, p. 1]

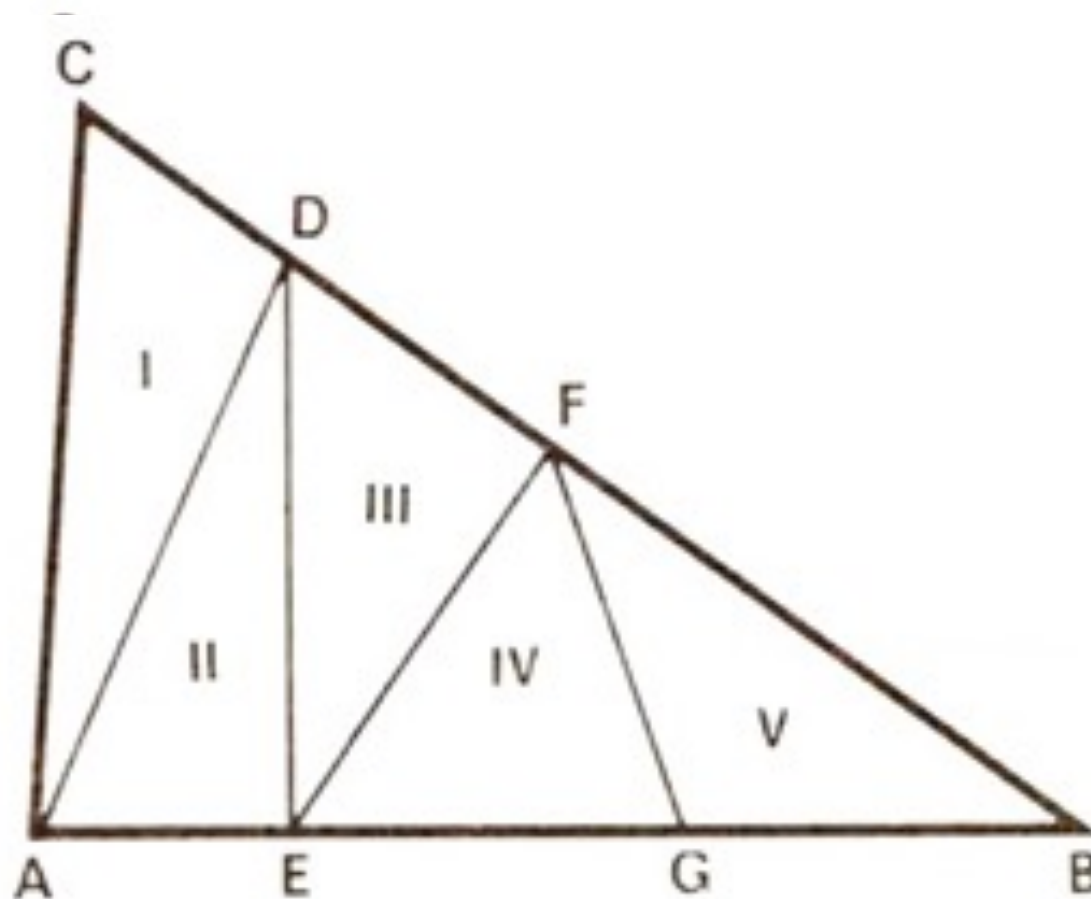


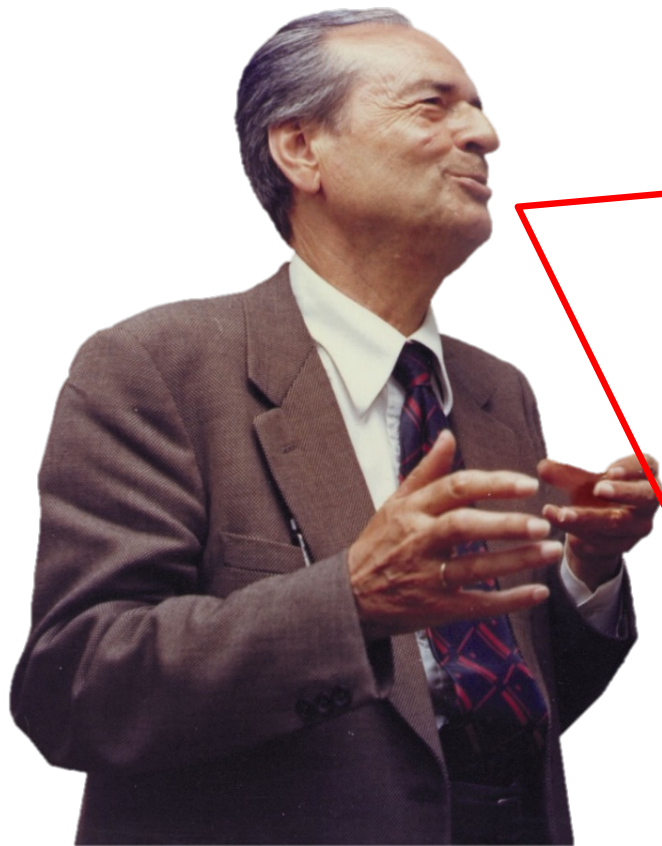
BdF mostra *come sia possibile, e come riesca istruttivo, giungere a conclusioni interessanti pensando direttamente a **problemi concreti**, senza impiegare teorie o ricette stereotipate di sapore scolastico.* [SVM, p. 3]

- Saper vedere le cose facili (p. 8)
- Saper vedere le cose concrete (p. 12)
- Sfruttare una visione dinamica (p. 30)
- Sfruttare una visione globale (fusionismo) (p. 35)
- Sfruttare i ragionamenti per continuità (p. 49)
- ...

Saper vedere le cose facili

Dato un triangolo, dividerlo in 5 parti di uguale area mediante una spezzata a zig-zag [SVM, p. 8]

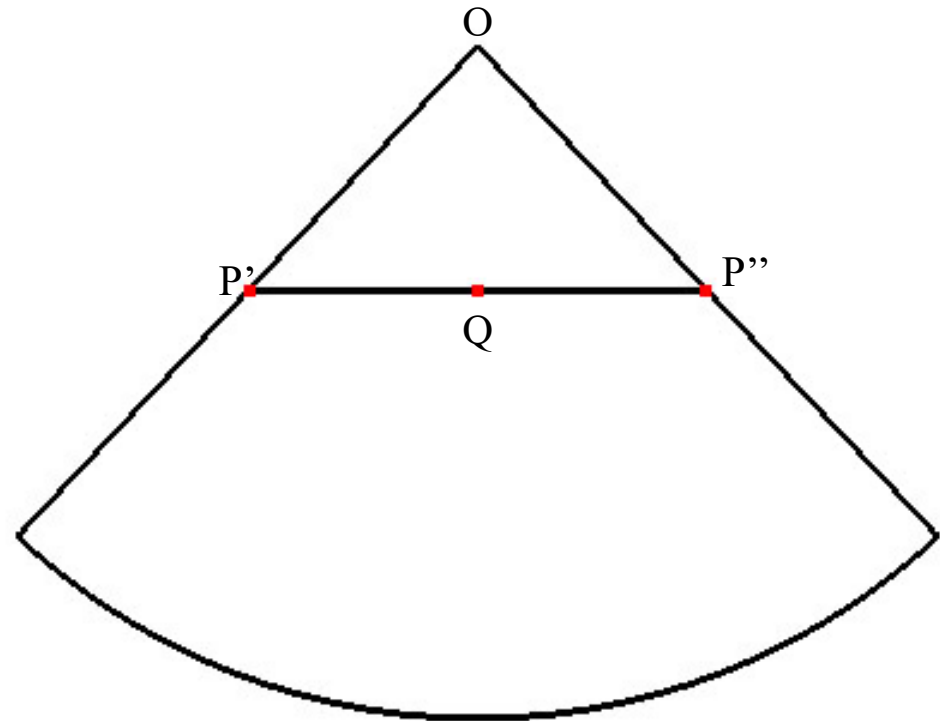
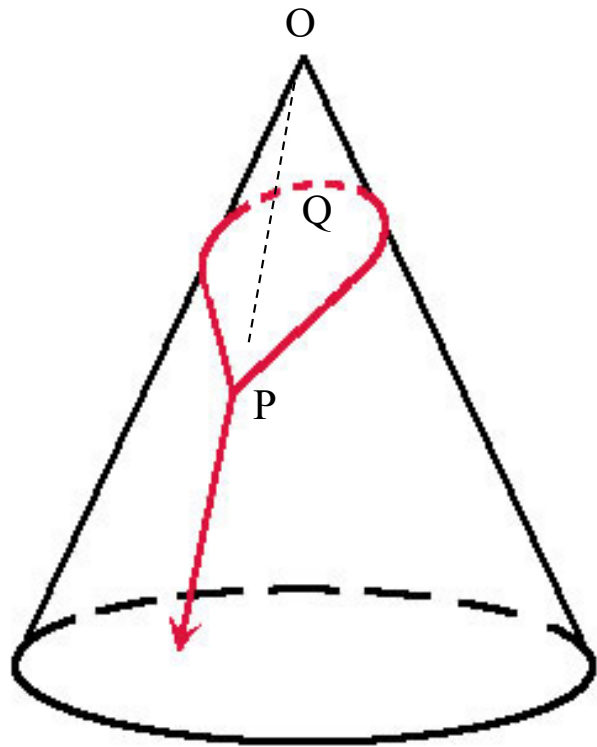




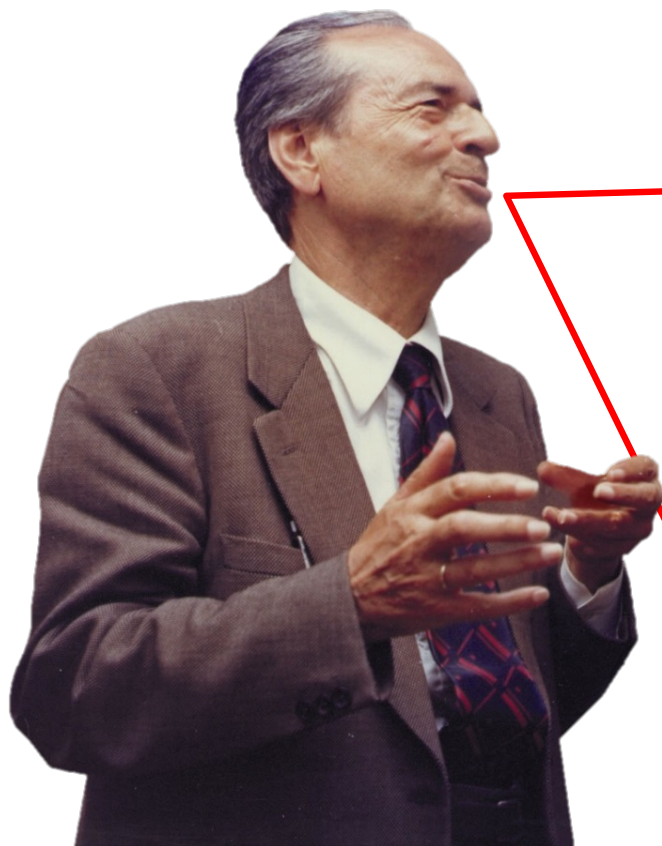
*La difficoltà (apparente) deriva [...] dall'abitudine a pensare che “capire la matematica” significhi essere in grado di seguire **una catena di passaggi formali** [...] controllandone la **correttezza** e confermando così l'esattezza della conclusione [...]; ma giungere alla conclusione così (“obtorto collo”, come diceva Federigo Enriques) non significa nulla rispetto al fatto più essenziale che è **penetrare il significato della questione e rendersi conto della linea di pensiero che permette di afferrarla e ragionarvi sopra**; è solo dopo che importa anche, per scrupolo, assicurarsi pazientemente dell'esattezza anche con quei passaggi formali che a volte sembra siano presi per la stessa essenza della matematica.*
[SVM, 1967, p. 8.]

- **Saper vedere le cose concrete**

Un problema di una Gara matematica richiedeva, sostanzialmente, per poter rispondere, che si avesse un'idea di come si sarebbe disposto un filo a cappio infilato nella punta di un cono e teso in un punto verso il basso (ad es. mediante un peso). [SVM, pp. 12-13]



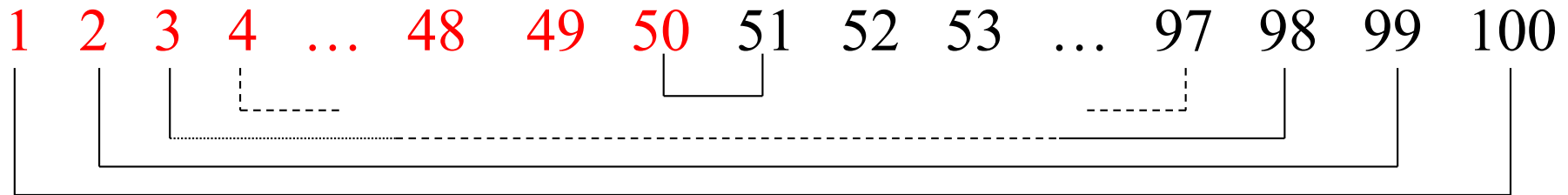
Nessuno (su circa 250 concorrenti) vi riuscì; i migliori si segnarono per qualche osservazione parziale corretta o sensata (seppure insufficiente a condurre alla conclusione esatta).



«Certo: la cosa era ovvia. Probabilmente tutti o quasi tutti coloro che non vi hanno pensato avevano costruito coni (imbuti, cappucci, cartocci) di carta o di cartoncino, da bambini, e avranno visto farne da bottegai e da venditori di caldarroste. Ma se un ragazzo, quando sente parlare di coni o di qualunque altra cosa a scuola, anziché pensare ai veri coni [...], relega tali nozioni nel limbo delle astrazioni scolastiche destinato a trasformarsi in dimenticatoio appena possibile, alla fine si ritrova ignorante come non mai. Avrà dissipato il tesoro dell'intelligenza sviluppata nei primi anni di vita, senza trar profitto dalle cose che, invece di apprendere, avrà trasformato in vani provvisori imbottimenti.»

[SVM, 1967, p. 12]

L'intuizione di un matematico bambino



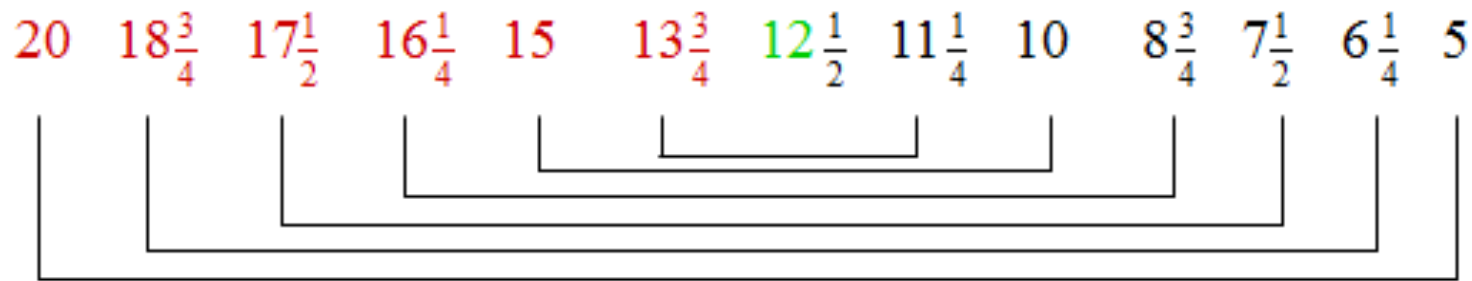
$$\frac{(1 + 100)}{2} = \frac{101}{2} = 50,5$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 100 \times 50,5 = 5050$$

*Gauss era Gauss, d'accordo. Però quest'osservazione era semplice: prestando un po' d'attenzione al problema, forse qualunque bambino avrebbe potuto accorgersi di questa proprietà e sfruttarla. **E saper vedere le cose semplici e degnarsi di rifletterci sopra è la cosa più importante [...]: così e soltanto così finiscono per apparire comprensibili intuitive ed ovvie altre cose sempre più complicate.***

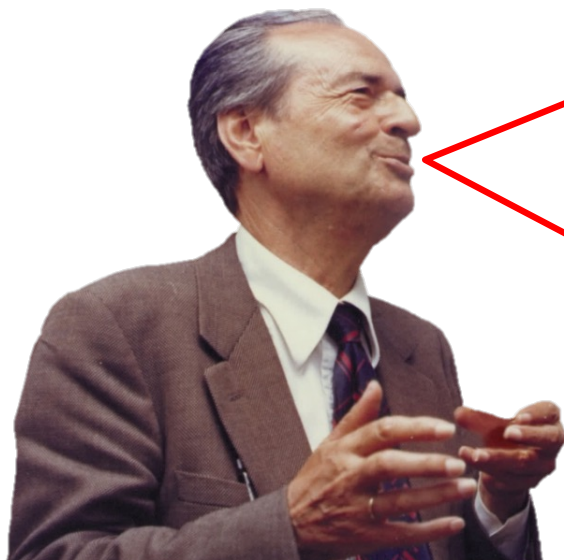
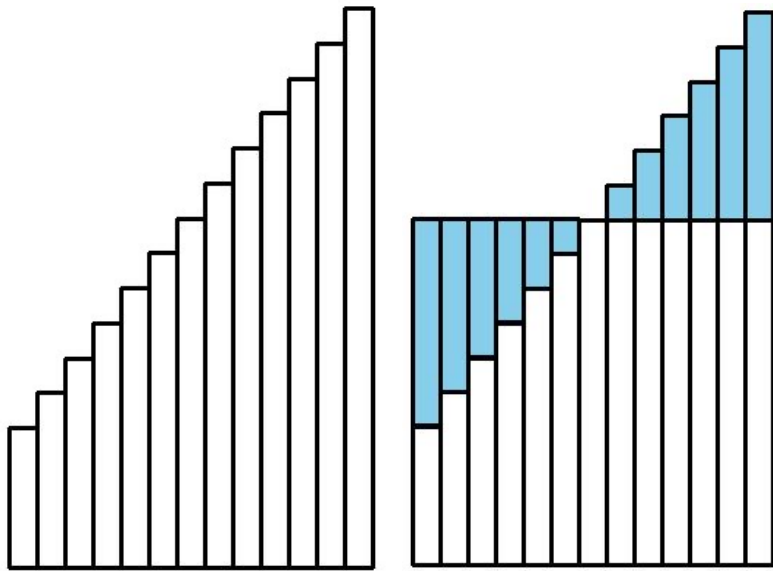
Riflettere ancora

- Lo stesso procedimento vale solo se i numeri della successione crescono? E se decrescono? (differenza costante)
- La differenza costante tra essi deve essere sempre necessariamente 1?
- Iniziare la successione dei numeri da 1 è restrittivo?



$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{13 \times (20+5)}{2} = \frac{162}{2}$$

«Qualunque risultato matematico riesce di regola più chiaro, o diventa addirittura intuitivo, rappresentandolo geometricamente in modo opportuno.» [SVM, p. 4]

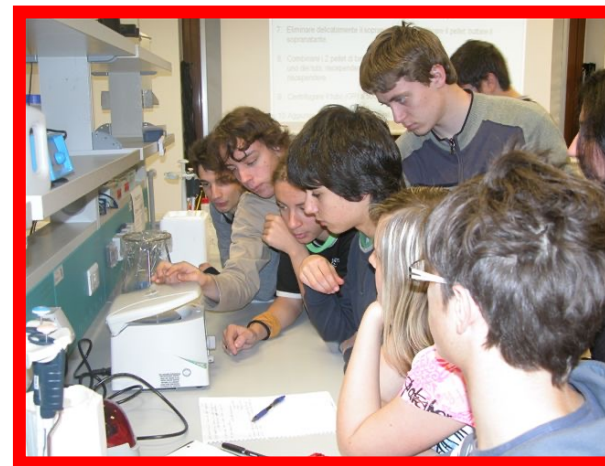


Da ogni nuova riflessione potremmo farne scaturire altre, continuando senza fine.

Quelle ora svolte bastano a far notare, per intanto:

- *come ciascuna di esse giovi a renderci più chiaro sotto vari aspetti il perché della conclusione già raggiunta nel caso particolare (della somma dei numeri da 1 a 100);*
- *come quella conclusione risulti applicabile in molti altri casi [...];*
- ***come il fatto di esprimere il risultato mediante formule (“calcolo letterale”) possa corrispondere a idee e bisogni spontanei, più di quanto forse non sembri incontrandolo nel corso di un programma scolastico;***
- ***quanto giovi saper immaginare da sé una rappresentazione geometrica.***

Conclusioni



*“Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un **insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici**. Il laboratorio, quindi, coinvolge **persone** (studenti e insegnanti), **strutture** (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), **idee** (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).”* [UMI-CIIM Matematica 2003, 28]

Bibliografia essenziale

J. Perry, *Discussion on the teaching of mathematics* 1902

<http://www.archive.org/stream/discussiononteach00britala#page/n7/mode/2up>

J. Perry, *Practical mathematics* 1899

<http://www.archive.org/stream/practicalmathem00britgoog#page/n3/mode/2up>

J. Perry, *Elementary practical mathematics*, London, Macmillan and Co. 1913

G. Chisholm, W. Young, *Geometria per i piccoli*, trad. L. Viriglio, Torino, Paravia, 1907

M. Montessori, *Psicoaritmetica*, Milano, Garzanti, 1971

M. Montessori, *Psicogeometria*, Roma, Edizioni Opera Nazionale Montessori, 2011

E. Castelnuovo, *Didattica della matematica*, Firenze, La Nuova Italia, 1963

E. Castelnuovo, *Lectio magistralis: Insegnare Matematica*, Festival della Matematica di Roma, 2007:

<https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/LectioMagECast.pdf>

B. De Finetti, *Il "saper vedere" in matematica*, Torino, Loescher, 1967:

http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=RIUMI_2015_1_8_3_299_0

G. Vailati [EV] *Epistolario 1891-1909*, a cura di G. Lanaro, Torino, Einaudi 1971

G. Vailati [S] *Scritti*, a cura di M. Quaranta, 3 voll., Sala Bolognese (Bo), Forni Editore, 1987

Fondo Vailati, Biblioteca di Filosofia, Università di Milano.

G. Anichini, L. Giacardi, E. Luciano (a cura di) *Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica, Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà*, La Matematica nella Società e nella Cultura, VIII, 3, 2015, pp. 1-500:

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3

L. Giacardi, “*Lavorare con le mani e con la mente*”. *Il laboratorio di matematica fra Ottocento e Novecento*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 39, 2016, pp. 517-549

L. Giacardi, R. Zan (a cura di) *Emma Castelnuovo. L'insegnamento come passione*. La Matematica nella Società e nella Cultura, VI.1 2013, pp. 1-193 :

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_1

Matematica 2003, a cura di G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, O. Robutti, *La matematica per il cittadino. Ciclo secondario*, Liceo Scientifico Statale “A.

Vallisneri, Lucca 2004 : <https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/>

Articoli di Emma Castelnuovo:

<https://claudio.fontanari.maths.unitn.it/EMMA/emma.htm>

Articoli di Bruno de Finetti:

<http://www.brunodefinetti.it/opere.htm>

R. Passione, *Montessori, Maria*

<http://scienzaa2voci.unibo.it/biografie/6-montessori-maria>