

La statistica come strumento di cittadinanza: alle origini dell'approccio matematico per le prime forme di mutualità

Iolanda Nagliati

Ferrara, 9 Maggio 2025

Indicazioni nazionali per i Licei

MATEMATICA – Linee generali e Competenze

[Al termine del percorso lo studente] saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, **la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.**

Gruppi di concetti e metodi di cui lo studente saprà dominare attivamente:

4) un'introduzione ai concetti di base del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica

...

Dati e previsioni

Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso di strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline *anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.*

Lo studente apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica. [Legame tra statistica e probabilità, storia più nota legata al gioco d'azzardo]

Indicazioni nazionali per i Licei

Risultati di apprendimenti nell'area storico umanistica

Conoscere i presupposti culturali e la natura delle istituzioni politiche, giuridiche, sociali ed economiche, con riferimento particolare all'Italia e all'Europa, e comprendere i diritti e i doveri che caratterizzano l'essere cittadini. Conoscere, con riferimento agli avvenimenti, ai contesti geografici e ai personaggi più importanti, la storia d'Italia inserita nel contesto europeo e internazionale, dall'antichità sino ai giorni nostri. Utilizzare metodi (prospettiva spaziale, relazioni uomo-ambiente, sintesi regionale), concetti (territorio, regione, localizzazione, scala, diffusione spaziale, mobilità, relazione, senso del luogo...) e strumenti (carte geografiche, sistemi informativi geografici, immagini, dati statistici, fonti soggettive) della geografia per la lettura dei processi storici e per l'analisi della società contemporanea

Storia e Geografia – Primo biennio

Nello specifico degli aspetti demografici lo studente dovrà acquisire le competenze necessarie ad analizzare i ritmi di crescita delle popolazioni, i flussi delle grandi migrazioni del passato e del presente, la distribuzione e la densità della popolazione, in relazione a fattori ambientali (clima, risorse idriche, altitudine, ecc.) e fattori sociali (povertà, livelli di istruzione, reddito, ecc.). Per questo tipo di analisi prenderà familiarità con la lettura e la produzione degli strumenti statistico-quantitativi (compresi grafici e istogrammi, che consentono letture di sintesi e di dettaglio in grado di far emergere le specificità locali), e con le diverse rappresentazioni della terra e le loro finalità, dalle origini della cartografia (argomento che si presta più che mai a un rapporto con la storia) fino al GIS.

Liceo delle scienze umane

Metodologia della ricerca

Durante il secondo anno lo studente affronta gli elementi di base della statistica descrittiva: a) campionamento; b) variabili; c) diagrammi. Svolge esercizi di elaborazione statistica relativi ai diversi tipi di distribuzione delle variabili e di incroci fra di esse.

Economia politica

Nel primo biennio lo studente riconosce la natura specifica del problema economico [...] Egli sa leggere e comprendere, anche attraverso l'ausilio di rappresentazioni grafiche e di dati statistici, l'evoluzione dei sistemi economici coordinando l'analisi con quanto appreso nello studio della disciplina storica nel biennio.

Linee guida per gli Istituti tecnici:

Il docente di Matematica concorre a far conseguire, al termine del percorso quinquennale, i seguenti risultati di apprendimento relativi al profilo educativo, culturale e professionale:

- padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica;
- possedere gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate;
- collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche.

Storia (Conoscenze, secondo biennio)

Strumenti della ricerca e della divulgazione storica (es.: vari tipi di fonti, carte geo-storiche e tematiche, mappe, statistiche e grafici, manuali, testi divulgativi multimediali, siti Web).

Economia Politica – Relazioni internazionali

Riconoscere gli aspetti geografici, ecologici, territoriali dell'ambiente naturale ed antropico, le connessioni con le strutture demografiche, economiche, sociali, culturali e le trasformazioni intervenute nel corso del tempo

CITTADINANZA

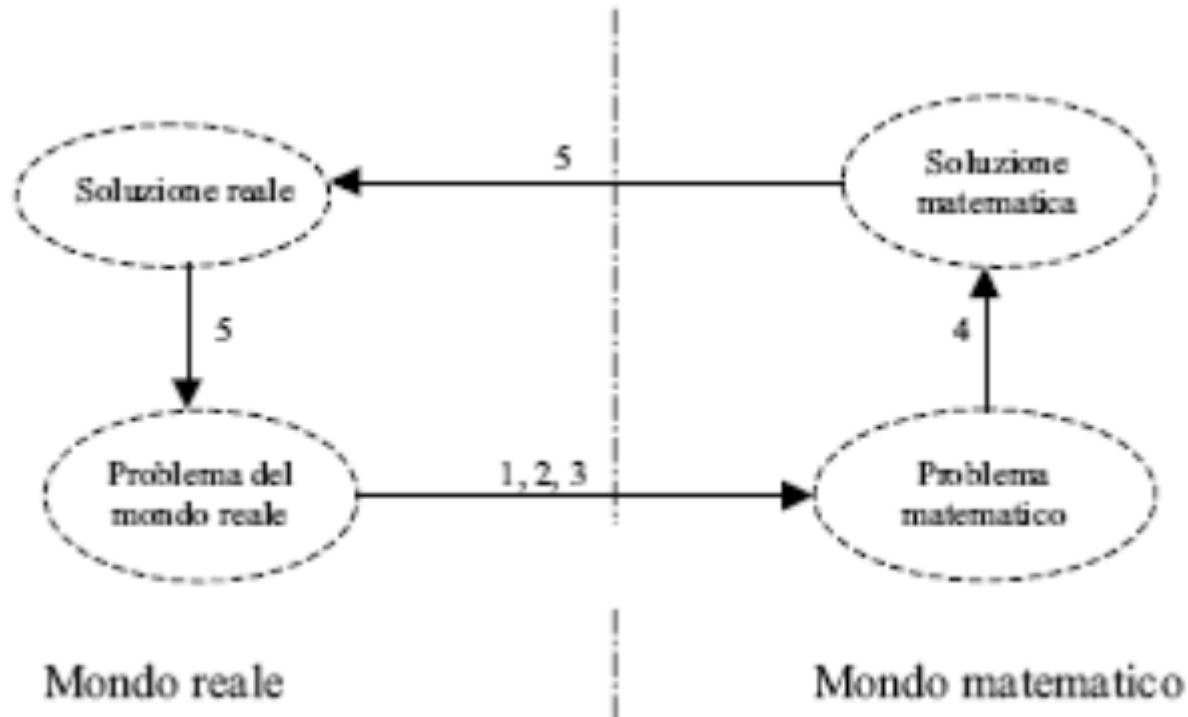
- Competenze europee (Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018)
- Linee guida per l'insegnamento dell'educazione civica
Competenza n. 8 - Maturare scelte e condotte di tutela del risparmio e assicurativa nonché di pianificazione di percorsi previdenziali e di utilizzo responsabile delle risorse finanziarie
Educazione finanziaria - obbligatoria nella primaria e secondaria
Legge Competitività, inserisce l'Educazione finanziaria nell'insegnamento dell'Educazione civica. In un'ottica interdisciplinare e trasversale, acquisiscono centralità nel percorso formativo la finanza, il risparmio e l'investimento, con l'obiettivo di rendere i ragazzi cittadini consapevoli, capaci di partecipare pienamente alla vita economica del Paese.
- Numeracy: abilità di accedere, utilizzare, interpretare e comunicare informazioni e idee matematiche, per affrontare e gestire problemi di natura matematica in un certo numero di situazioni della vita adulta
Italia 244 punti (OECD 263 punti, 34° posto su 37 paesi - Organisation for Economic Co-operation and Development)
Donne 241 (OECD 258) - Uomini 248 (OECD 268)

Mostra come alcuni strumenti matematici servono per leggere la realtà, capirla ed essere cittadini attivi.

Proporre situazioni concrete, vicine agli studenti, con dati reali sui quali usare le competenze di matematica.

Matematizzazione della realtà (B.Piochi)

- 1) Si parte da un problema situato nella realtà.
- 2) Si organizza il problema in base a concetti matematici e si identificano gli strumenti matematici pertinenti.
- 3) Si ritaglia progressivamente la realtà attraverso processi quali il fare supposizioni, il generalizzare e il formalizzare il problema, che mettono in evidenza le caratteristiche matematiche della situazione e trasformano il problema reale in uno matematico che rappresenti fedelmente la situazione di partenza.
- 4) Si risolve il problema matematico.
- 5) Si interpreta la soluzione matematica nei termini della situazione reale, individuando anche i limiti della soluzione proposta.



Problemi “reali”, non artificiosi e con poca numerosità per tradurre “la realtà” in strutture matematiche

- proporre un modello matematico e validarlo
- interpretare i modelli matematici in termini di “realtà”
- riflettere, analizzare e valutare un modello e i suoi risultati
- comunicare ad altri il modello e i suoi risultati (compresi i limiti di tali risultati)

Illuminismo

Si intende sia l'età della storia d'Europa compresa tra la conclusione delle guerre di religione del 17° sec. o la rivoluzione inglese del 1688 da un lato e la Rivoluzione francese del 1789 dall'altro, sia la connessa evoluzione delle idee in fatto di religione, scienza, filosofia, politica, economia, storiografia e il rinnovamento delle forme letterarie nel corso del 18° secolo. La metafora della luce contenuta nel termine (fr. Âge des lumières; ingl. Enlightenment; ted. Aufklärung) deriva dalla secolarizzazione e laicizzazione dell'idea di provvidenza o progresso, intesa come attività storica umana: così il concetto di 'luce di natura' fu anteposto e contrapposto dai deisti inglesi alla rivelazione cristiana in quanto possesso originario della mente umana; così pure la scoperta delle leggi naturali apparve una più piena rivelazione o 'illuminazione'. [Treccani]

Aritmetica politica - Administrer c'est calculer

Dopo che la fisica newtoniana aveva mostrato la sua efficacia nell'affrontare lo studio dei fenomeni naturali, è "praticamente inevitabile" (A. Koyré) che si pensi di usarla per qualsiasi scienza, comprese quelle sociali e morali, per costituire una "scienza dell'uomo".

I primi problemi affrontati, evidenti nella Francia dell'Ancien Régime (G.Israel):

- governare razionalmente l'economia
- formulare una costituzione e un sistema elettorale capaci di realizzare un governo giusto, democratico e efficiente della società
- determinare il processo di formazione di decisioni giuste e razionali nelle assemblee e nei tribunali

Mathématique sociale di Condorcet (L.Pepe)

Costruzione di una *scienza matematica* dei fenomeni morali, sociali ed economici:

- primi tentativi nel periodo illuministico, soprattutto tardo-illuministico (fine Settecento)
- attività disperse
- non hanno luoghi istituzionali, analoghi alle Accademie e alle pubblicazioni in Atti, Memorie, Riviste
- discussione sul loro statuto di *scienze*

«La questione del legame fra le teorie matematico-sociali e l'azione politica effettiva non è stato approfondito entro questi studi, soprattutto per quanto attiene due aspetti fondamentali: il suo ruolo (teorico) nella formazione della moderna economia matematica e della moderna statistica; il suo ruolo (pratico) entro il progetto di governo scientifico della società.» (G.Israel)

Approccio alle fonti originali (anche in lingue diverse dall'Italiano), ad esempio periodici scientifici o misti, anche locali

Raccolte di dati accessibili alla popolazione, in contesti diversi:

Astronomia

Meteorologia (G.Bongiovanni a Ferrara)

Ristretto Meteorologico dell'Anno 1776 in Padova. Il Barometro è posto 4
Pertiche sopra il Livello del Fiume, ch'è altrettanto sopra il Livello
del Mare.

	Barometro		Termometro		Misura della Pioggia	
	Altezza Media					
	Poll.	lin.X.	Freddo	Caldo	Poll.lin.	X II
Decemb. 1775	28	1,0	370,7		0 9 9	$\frac{1}{2}$
Gennaro 1776	27	8,9	396,4		3 3 11	$\frac{1}{2}$
Febbraio	27	10,7	287,3		4 0 5	$\frac{1}{2}$
Marzo	27	11,3	181,4		1 7 9	
Aprile	27	11,3	94,9	2,4	3 10 10	$\frac{1}{2}$
Maggio	27	10,7	41,0	27,4	3 10 1	
Giugno	27	11,2		97,1	1 6 8	
Luglio	27	10,3		165,9	1 1 7	$\frac{1}{2}$
Agosto	27	10,7		163,6	1 4 7	$\frac{1}{2}$
Settembre	27	9,8	17,1	35,9	5 6 9	
Ottobre	27	11,7	79,8	0,6	4 1 8	$\frac{1}{2}$
Novembre	27	10,6	255,1		2 8 3	
	27	10,9	1703,7	492,9	35 0 5	
Grad. Medio 9,4						

da Pisa. LUGLIO 1826.

RISULTATI DELLE OSSERVAZIONI									
TERMOMETRO					BAROMETRO				
Medie	{	m. gr.	15,7	Medie	{	m. pol.	28	1,8	
	{	m. c.	20,9		{	m. c.	28	1,2	
	{	m.	10,5		{	m.	28	1,2	
Estremi	{	in più	23,8	Estremi	{	in più	P. 28	3,4	
	{	in meno	12,0		{	in meno	28	0,1	
Differenza	gr.		11,8	Differenza				3,3	
Pluviometro	pol.	4	1,7						
Temperatura del Pozzo	gr.		14,0						
OSSERVAZIONI DIVERSE									
Sembra negli ultimi sette giorni del mese di Giugno, che col finire della primavera la cattiva stagione dovesse egualmente cessare, e che a tanta pioggia caduta in questo, e nell'antecedente mese di Maggio dovessero pur succedere giornate asciutte, e serene quant'ordinariamente suole averne l'estate. All'opposto il mese di Luglio fu quasi tutto di cattivo tempo, di pioggia, e spesso di piogge precipitose, e violente come furono quelle cadute sulla vetta del nostro monte pisanò il 1. e il 4. Luglio, e quelle dell'8. 10. e 11. le quali cadute quì a torrenti nuovamente inondarono molte terre di questa bella campagna. Il vento quasi sempre debolissimo fu per lo più nella direzione di scirocco fino verso il mezzo giorno, sulla qual ora ordinariamente piegò a libeccio-ponente, di rado giungendo a volgersi a diritto maestrale, ove, quando ciò accadde, si trattene sempre pochissimi momenti. Da questo dobbiamo particolarmente ripetere la caligine, e il caldo affannoso, che tanto spesso ci tormentò in questo primo mese della state.									

ANNO 1815

Mese di Aprile

PRECIPITAZIONE

Altezza in rom.				Linee		POLLICI E LINEE DI TUBO		TERMINI TEMPORALI	
11	9	15	21	11	21				
8 9	8 15	8 21	8 27						
3,0	—	—	3,0	3,50	pgm. 21-21,5 del R. 8-8,45; pg. 21-21,5 del R. 8-8,45; pgm. 21-21,5 del R. 8-8,45; pgm. 21-21,5 del R. 8-8,45				
1,5	—	—	1,5	3,00	pgm. 21-21,5 del R. 8-8,45; pgm. 21-21,5 del R. 8-8,45; pgm. 21-21,5 del R. 8-8,45; pgm. 21-21,5 del R. 8-8,45				
—	—	—	—	0,25	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
1,5	—	0,5	2,5	1,25	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
—	—	2,5	2,5	1,75	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5			Appar. tenuto a N. 18-18,5. Ten. da N. a W. 18-18,5.	
—	—	—	—	—	Numero dei giorni con	altezza av.	Numero		temperali — gradinate —
—	—	—	—	—	pg. 4	pgm. —	av. —		
0,5	—	0,5	0,5	12,25	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
0,2	0,2	0,2	0,2	4,00	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
—	—	0,5	0,5	0,50	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
0,2	1,0	—	1,2	3,50	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
—	—	0,2	0,2	0,50	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
—	—	0,2	0,2	1,00	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
—	—	—	—	—	Numero dei giorni con	altezza av.	Numero		temperali — gradinate —
—	—	—	—	—	pg. 5	pgm. —	av. —		
22,5	21	—	21,4	9,00	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
0,2	0,5	—	1,0	1,00	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5			Appar. tenuto ad E. 17-17,5.	
—	—	2,5	2,5	0,50	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5			Appar. tenuto a S. N. 18-18,5.	
—	—	0,4	0,4	0,50	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
0,5	0,1	—	0,7	1,00	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5			Alcune tenute av.	
0,1	—	—	2,1	1,00	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5			Appar. tenuto con L. e T. a SW. pm.	
—	—	—	—	—	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5			Appar. tenuto con T. e L. pm.	
—	—	—	—	—	Numero dei giorni con	altezza av.	Numero		temperali — gradinate —
—	—	—	—	—	pg. 6	pgm. —	av. —		
25,2	3,0	2,0	31,1	13,00	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				
—	—	—	—	—	Numero dei giorni con	altezza av.	Numero		temperali — gradinate —
—	—	—	—	—	pg. 15	pgm. —	av. —		
31,5	4,7	7,0	43,3	30,25	pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5; pgm. 17-17,5				

L'inizio degli studi demografici e, più in generale, dell'applicazione delle tecniche di analisi statistica, si fa risalire al 1662, anno in cui il mercante di stoffe londinese John Graunt (1620-1674) pubblica un volume di un centinaio di pagine dedicate all'analisi dei *Bollettini di mortalità*.

Gli studiosi si erano interessati anche in precedenza alla dimensione e ai fattori di crescita della popolazione, ma attraverso speculazioni astratte e non analisi vere e proprie. Graunt è stato anche il primo ad analizzare in modo sistematico il tema delle fonti per la ricerca demografica.



CAPTAIN JOHN GRAUNT

Natural and Political
OBSERVATIONS

Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.

By *JOHN GRAUNT*,
Citizen of
LONDON.

With reference to the Government, Religion, Trade,
Growth, Age, Diseases, and the several Changes of the
said CITY.

— *Nas, me ut miratur Turbo, labens.*
Contentus passus LeBarbar —

LONDON,
Printed by Tho: Roycroft, for John Martin, James Allcove,
and Tho: Dineen, at the Sign of the Bell in St. Paul's
Church-yard, MDCCLXII.

La pubblicazione di Graunt contiene la prima moderna tavola di mortalità; altre tavole seguirono, fra le quali quelle dell'astronomo e matematico inglese E. Halley (1693) per la città di Breslavia, quelle olandesi dei fratelli Huygens, di J. De Witt e di J. Hudde che favorirono anche miglioramenti metodologici.

1606.

A TABLE of the

CHRISTENINGS and MORTALITY

For the Year 1605 and 1606.*

Weeks.	Days of the Month.	Christ.	Bur.	Pla.	Par. infenc.	Weeks.	Days of the Month.	Christ.	Bur.	Pla.	Par. infenc.
1	Dec. 26.	100	116	5	5	28	July 3.	109	110	25	12
2	January 2.	117	151	6	5	29	10.	111	134	33	18
3	9.	130	138	4	4	30	17.	115	146	50	22
4	16.	124	138	3	2	31	24.	96	140	46	26
5	23.	143	121	6	4	32	31.	132	178	66	29
6	30.	124	101	3	2	33	August 7.	131	181	67	29
7	Febr. 6.	122	105	5	5	34	14.	141	197	75	33
8	13.	131	118	7	6	35	21.	133	189	85	28
9	20.	126	109	12	6	36	28.	125	207	85	29
10	27.	102	117	9	8	37	Septem. 4.	123	241	116	32
11	March 6.	110	98	7	4	38	11.	134	216	105	28
12	13.	126	137	9	7	39	18.	121	214	92	35
13	20.	133	133	14	11	40	25.	132	204	87	36
14	27.	134	123	17	8	41	October 2.	121	256	141	40
15	April 3.	123	114	13	9	42	9.	134	218	106	38
16	10.	132	145	27	11	43	16.	142	227	117	37
17	17.	139	129	12	8	44	23.	131	224	109	38
18	24.	118	110	11	7	45	30.	124	226	101	34
19	May 1.	92	136	17	10	46	Novem. 6.	136	183	68	27
20	8.	116	103	13	11	47	13.	125	162	41	20
21	15.	128	94	13	8	48	20.	121	145	28	11
22	22.	113	132	14	9	49	27.	143	123	22	13
23	29.	94	98	9	7	50	Decem. 4.	155	160	45	17
24	June 5.	129	112	16	8	51	11.	135	137	38	20
25	12.	127	112	19	14	52	18.	136	132	28	15
26	19.	121	119	15	10	53	25.	134	135	38	19
27	26.	132	126	24	16						

Totals	{	Christened	—	—	6614
		Buried	—	—	7920
		Whereof of the Plague			2124

• BELL'S London's Remembrancer.

A TABLE

Digitized by Google

L'attenzione nei confronti della mortalità risale, da un lato, a necessità legate alle assicurazioni sulla vita, che si stavano diffondendo soprattutto nel nord Europa, e dall'altro a finalità conoscitive, per il buon governo dello Stato.

[illegible]

Place this Table at page 114.

1229.5

Nel secolo seguente che si registrerà un'ulteriore diffusione di questo strumento in tutta Europa; in Italia, con un certo ritardo, a partire dalla fine del Settecento. È importante la traduzione del trattato di A.De Moivre sulle rendite vitalizie a cura di Padre G.Fontana (1776), dell'Università di Pavia; Toaldo scrive: «L'Italia non ha prodotto quasi nulla fuori di questo libro; le tavole istesse inserite nel medesimo sono oltramontane»

Giuseppe Toaldo (Pianezze, 1717 – Padova, 1797)

Tavole di Vitalità 1787

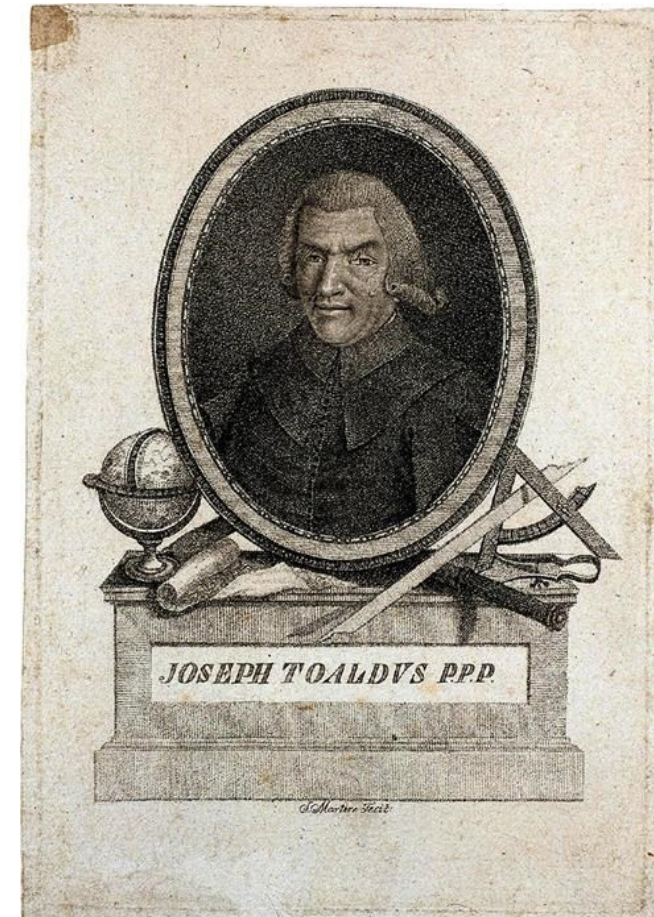
Dati raccolti con molta cura, ma passano quasi inosservate, probabilmente non ne viene colta l'importanza

Toaldo si rendeva conto della necessità di questo strumento per l'Italia, in particolare per i problemi demografici del Veneto, e propone un modello, esplicitando i criteri usati per raccogliere dati, cercare rapporti tra essi e produrre tavole comparative; descrive i registri come mal conservati

«Sin da quando io reggeva la Pieve di Montegalda, sono più di trenta anni, per mio divertimento avevo fatto spoglio di que' Registri di Chiesa, e mi aveva formato una Tavola di Vitalità per quel Paese.»

Raccoglie dati sul Ghetto di Verona e di Padova

L'opera è ricordata da A.Fabroni nell'elogio funebre, che cita lo «zelo di popolare utilità»



^{ridetto}
TAVOLE DI VITALITÀ (1)

COMPOSTE

DA

D. GIUSEPPE TOALDO

PREPOSITO DELLA SS. TRINITÀ

PROFESSORE E ACCADEMICO DI PADOVA, &c.



IN PADOVA, MDCCLXXXVII.

NELLA STAMPERIA DI GIO. ANTONIO CONZATTI.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.
E SI TROVA PRESSO GIACOMO STORTI IN VENEZIA.

Grande attenzione è riservata a diversi aspetti di mortalità differenziale, non solo geografica; prepara tavole per gli ebrei, per i cenobiti e le monache, distingue per sesso la mortalità fra la popolazione religiosa, ecc.

Osserva come i Cenobiti avevano una mortalità più bassa dei secolari, che le donne erano «più vitali degli uomini». A questo proposito, infatti, scriveva: «Una prova certa n'è, che nascendo più Maschi che Femmine, si trovano in ogni età in vita più Femmine che Maschi. Questo fatto viene confermato dalla *Tavola V. delle Monache*, confrontata con quella de' *Monaci*: si vede che le Monache hanno un vantaggio di tre anni di vita: di 636 Monache, 122 oltrepassano gli anni 80; ne' Monaci, di 2467, avrebbero dovuto trovarsi in proporzione 473 ottuagenari e non furono che 307. Questa longevità delle donne in generale si ripete dall'abbondanza d'umido, e dalla mollezza de' vasi e delle fibre, che più tarda a contrarre la senile aridità» .

E ancora: «Parlando di longevità, osservabile si rende la *Lista degli Ebrei*: essa è un poco scarsa, ma basta per indicare [...]. In qualunque modo, si scorge negli Ebrei un vantaggio notabilissimo di vita [...]. Chi voglia investire un Capitale sopra una vita, avrà ragione, se scieglierà la vita d'un Ebreo».

Ampio spazio è dedicato all'eccessiva mortalità dei bambini, in particolare la mortalità nel primo anno di vita. Mostra di conoscere bene la tesi che individua nel battesimo precoce una delle cause principali della mortalità dei bambini, ma dichiara di averne fatto esperienza diretta: «Mi ricordo anche io, quando battezzavo, che venivano quelle povere creaturine livide e smorte come cadaveri». A sostegno di tale tesi prende in considerazione la mortalità degli ebrei che non espongono i bambini all'aria e al freddo, fra i quali, nonostante la circoncisione, la mortalità è assai minore.

Scrive: «Fin ora non v'è legge che vieti portar i Bambini alle Chiese nei primi giorni dopo la nascita, nei Mesi, e nei Paesi più freddi; potrebbe però in qualche modo supplire la presenza de' Parrochi, regolandosi secondo la distanza dalle case, la quantità del cammino, la condizione delle giornate, ec.»

X 31 X

TAVOLA IV. Cenobiti.				TAVOLA V. Monache a parte.				TAVOLA Ebrei.	
Anni d' Età.	Morti ciascun anno d' Età.	Reflessi in vita.	Supra- viven- za.	Morti ciascun anno d' Età.	Reflessi in vita.	Supra- viven- za.	Morti ciascun anno d' Età.	Reflessi in vita.	
71	129	1569	6. 2	20	286	8. 1	17	338	
72	121	1440	6. 1	11	268	7. 0	12	311	
73	117	1319	5. 7	16	255	6. 6	17	302	
74	129	1201	5. 3	12	239	5. 10	15	246	
75	123	1072	5. 2	23	212	4. 4	5	152	
77	110	950	4. 10	21	199	3. 1	12	216	
78	76	840	4. 6	14	178	2. 0	10	212	
79	82	764	4. 4	15	164	4. 6	2	207	
80	134	681	4. 2	27	149	4. 6	52	205	
81	64	547	3. 10	19	122	4. 4	5	152	
82	76	482	2. 6	18	102	4. 6	11	147	
83	48	407	2. 1	5	85	4. 0	4	134	
84	71	350	2. 0	10	80	2. 4	14	130	
85	59	288	2. 2	9	64	2. 7	22	106	
86	52	239	2. 10	13	55	2. 8	7	77	
87	40	187	2. 2	6	42	2. 0	2	70	
88	22	147	2. 2	7	36	2. 1	10	65	
89	24	114	2. 4	2	29	2. 0	1	53	
90	25	90	2. 4	2	21	4. 0	28	52	
91	18	55	2. 9	2	14	4. 0	0	22	
92	9	47	2. 6	0	12	4. 0	7	21	
93	7	38	2. 4	2	12	2. 0	2	10	
94	10	31	2. 10	3	10	2. 6	6	14	
95	8	21	2. 2	1	7	1. 11	4	8	
96	8	17	2. 10	2	6	1. 0	2	4	
97	2	2	1. 8	1	2	2. 0	0	2	
98	2	2	1. 1	0	2	1. 0	1	1	
99	2	2	1. 0	1	2	1. 0	1	1	
100	2	2	1. 0	1	1	0. 1	0	0	

Una volta raccolti questi dati iniziano i tentativi di interpretarli, per farne uso

Rappresentazione:

1782 cartogrammi

1786 diagrammi a barre

1801 diagramma a torta

Determinazione degli “indici centrali”:

L'idea di medie di vario tipo è relativamente recente, e la definizione viene precisata da O.Chisini solo nel 1929; scrive Chisini: “Definire, come molti fanno seguendo Cauchy, «media fra più quantità date una nuova quantità compresa fra la più piccola e la più grande delle quantità considerate» non significa press'a poco nulla; e definire le singole specie di medie che si incontrano abitualmente (aritmetica, geometrica, armonica, ecc.) è opera bensì esatta, ma puramente formale ed antifilosofica, che può servire, e male, solo per un uso empirico”.

B.De Finetti (1978): la ricerca di una media ha come scopo quello di semplificare una data questione sperimentale “sostituendo in essa a due o più quantità date, una quantità sola che valga a sintetizzarle, senza alterare la visione d'insieme del fenomeno considerato”. Deve però essere chiaro che non ha senso parlare di media di due (o più quantità), ma ha senso parlare della media di esse relativamente alla “valutazione sintetica di un'altra grandezza che ne dipende”.

Prime forme di mutualità

Assicurazioni: con funzioni di utilità sociale per proteggere la collettività dai rischi e dalle catastrofi (navigazione, incendio di Londra 1666); in Inghilterra nasce, nel 1762, l'assicurazione per la persona sulla vita, con la pubblicazione delle tavole di mortalità che allora stimavano la speranza di vita media a 33 anni.

Fondi per le vedove: una cassa pubblica doveva garantire una rendita vitalizia alla vedova, assicurata dal marito che doveva versare un capitale iniziale e pagare un premio annuale durante la sua vita. La prima istituzione è negli stati germanici nel Settecento, nel principato di Hannover e nel regno di Prussia, e in Danimarca. (M.T.Borgato)

Dal punto di vista matematico il problema è più complesso perché si deve tenere conto della durata della vita di due persone.

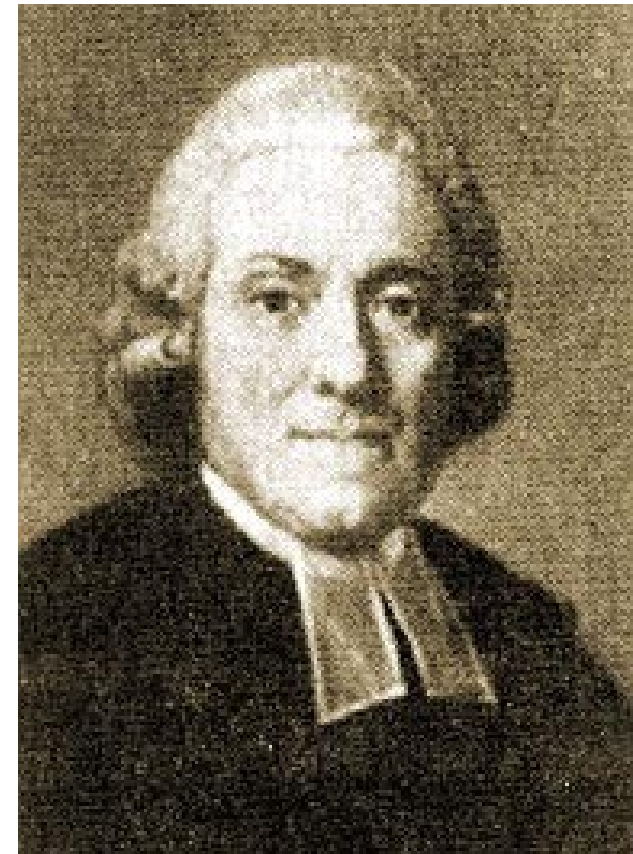
Negli anni 1760-80 vengono pubblicati diversi studi di matematica attuariale in lingua tedesca.

Il *padre* della statistica delle popolazioni fu J. P. Süssmilch (1707-1767).

Raccolse moltissimi dati sulle variazioni di popolazione, cercando di dimostrare che la Provvidenza divina era presente in tutti i campi delle statistiche sulla vita. La discussione su questi temi riguarda anche questioni filosofiche: Il nuovo interesse verso la statistica delle popolazioni, legato allo studio del rapporto tra i sessi alla nascita, trasse origine e stimoli dal problema generale di distinguere la casualità dal progetto divino.

Dal punto di vista metodologico Süssmilch compì molti errori: considerò i dati relativi a città e a villaggi senza il calcolo delle medie pesate e non tenne conto delle differenze riguardanti le età per le popolazioni prese in esame. Nonostante ciò, le sue tavole di vita continuarono a essere usate ben oltre il 1800.

Gli studi quantitativi sulla popolazione non furono inizialmente di interesse per lo stato; i programmi sociali cominciarono ad apparire in Germania solo intorno al 1880; prima di ciò, i governi erano interessati esclusivamente ai contribuenti fiscali e ai potenziali soldati.



Leonhard Euler (Basilea, 1707 – San Pietroburgo, 1783)

Fu uno dei più importanti e prolifici matematici (oltre 800 lavori censiti). Tra questi compaiono anche studi su questioni legate alla probabilità e alla statistica, e cinque memorie su questioni legate alle assicurazioni e rendite.

Dopo un primo soggiorno a San Pietroburgo dal 1727 al 1741, trascorse il periodo successivo a Berlino fino al 1766, quando ritornò definitivamente in Russia.

Il suo interesse su questi temi prese avvio studiando le lotterie, quando verso il 1749 Federico II gli chiese un giudizio sull'ipotesi di istituirne una, e di stabilire un fondo per le vedove. Gli strumenti matematici necessari si intrecciano.

La «lotteria genovese» fu tra i primi tentativi di uno stato di finanziarsi con questo strumento (per fronteggiare una crisi economica della Repubblica marinara). Altri presero in seguito esempio da questa iniziativa.

Euler partecipò anche attivamente alla preparazione della seconda edizione (1765) della principale opera di Süßmilch, *Die göttliche Ordnung* (L'ordine divino).



Aspettativa di vita e tavole di mortalità

Opera Omnia Serie I, Volume 7, 1923 (Ed. Louis Gustave du Pasquier). Sono catalogati secondo il numero dato da G.Enestrom .

E334. *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain, Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* (1760), 1767, p.144-164

Esamina sei questioni:

1. Un certo numero di uomini, tutti della stessa età nota, trovare quanti di loro sono probabilmente ancora in vita dopo un certo numero di anni
2. Trovare la probabilità che un uomo di una certa età sia ancora vivo dopo un certo numero di anni.
3. Trovare la probabilità che un uomo di una certa età muoia nel corso di un dato anno.
4. Trovare i termini in cui un uomo di una certa età può sperare di sopravvivere, nel senso che è altrettanto probabile che muoia prima di questo termine che dopo.
5. Determinare la rendita vitalizia che è giusto pagare ad un uomo di età fissata fino alla morte per una somma accumulata in precedenza.
6. Quando le parti interessate sono bambini appena nati e quando il pagamento delle rendite vitalizie deve iniziare solo quando avranno raggiunto una certa età, determinare l'ammontare di queste rendite vitalizie.

Fa uso delle tavole di mortalità di W.Kesseboom del 1742, in cui vengono dati i numeri dei viventi da una popolazione iniziale di 1400 neonati dopo x anni, con x fino a 95.

Euler calcola da qui la proporzione dei viventi da un numero N di neonati. Usa i simboli

$(1), (2), (3), (4), \dots (n), \dots$

per indicare le probabilità per un neonato di arrivare all'età di 1 anno, di 2 anni, ..., di n anni

Inizialmente per Maggiore generalità presume solo che la successione sia di frazioni, decrescenti tra 1 e 0.

Quindi se il numero iniziale di uomini è M , e l'età è m , il numero iniziale è

$$M = (m) N$$

da cui ricava N ; dopo n anni l'età sarà $m + n$, e il numero di quelli ancora in vita sarà $(m + n) M$

Introduce il concetto di *vie probable*, come numero di anni di “speranza di vita”.

Dal punto 4 il problema diventa pratico, su questioni economiche (non più di semplice calcolo come nei precedenti). Si tratta di assegnare un valore a quelle che chiamiamo rendite vitalizie, o in francese, *rentes viageres*. Una rendita vitalizia è un contratto che prevede il pagamento di una somma di denaro fissa a una persona ogni anno fino alla sua morte. Le rendite vitalizie tendono ad avere un valore maggiore per una persona più giovane (anche se non sempre) perché è probabile che la persona più giovane vivrà più a lungo. Nei termini di Euler, la persona più giovane di solito ha una maggiore capacità di vivere. Inoltre, il valore temporale del denaro (di solito) fa sì che il denaro valga più oggi di quanto la stessa quantità di denaro varrà in una data futura. Euler ha in mente entrambe queste complicazioni quando enuncia il punto 5.

Euler fa riferimento alla vita degli *uomini* in tutto il testo.

Questo non è dovuto a disinteresse; era noto, dagli studi di Kersseboom e di altri, che uomini e donne avevano modelli di mortalità diversi, quindi i risultati di Euler si applicavano effettivamente agli uomini e non necessariamente alle donne. Erano anche consapevoli che la mortalità era diversa nelle città rispetto alle campagne e che variava a seconda dei paesi e dei climi. Euler non ne fa menzione, ma anche altri autori sapevano che i loro dati erano in una certa misura distorti dalla migrazione dalle campagne alle città, in un modo che faceva sembrare gli abitanti delle città più longevi di chi abita in campagna.

Euler fa alcune ipotesi implicite:

- che la popolazione considerata formi un insieme chiuso, cioè che non ci siano né emigrazioni né immigrazioni;
- che la legge della mortalità resti costante nel corso degli anni;
- che ci sia una proporzionalità diretta tra il numero di tutti i vivi e il numero delle nascite annuali.

Nella seconda parte della memoria, Eulero enuncia la sua ipotesi di crescita demografica: “una popolazione cresce, ad intervalli di tempo uguali, in progressione geometrica, quando non c’è niente che impedisca la crescita”.

Subito dopo la memoria sulla mortalità si trova la

E335. *Sur les rentes viagere, Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* (1760), 1767, p.165-175

Euler vedeva questa come una continuazione della E334. Deriva una formula per facilitare il calcolo delle annualità usando il metodo della società fittizia, *la méthode de la société fictive*.

Si vuole determinare il premio a_m di una rendita vitalizia immediata di ammontare r pagabile alla fine di ogni anno finché vive una persona attualmente di età m .

Per facilitare la determinazione del premio, Eulero usa una formula contenente una relazione di ricorrenza che in forma moderna diviene

$$a_m = \frac{l_{m+1}}{l_m} \cdot v \cdot (1 + a_{m+1})$$

dove l_x è il numero dei viventi all'anno x , v il numero di anni successivi

In questo modo è sufficiente usare una tavola di mortalità per il calcolo dei premi.

Le stesse questioni sono trattate in altre memorie:

E403 *Des Herrn Leonard Eulers nöthig berechnung zur Einrichtung Einer Witwencasse* 1769

E473 *D'un Etablissement public pour payer des pensions a des veuves fonde sur les principes les plus solides de la probabilité*, pp. 183-245.

Questa memoria include la descrizione di una Tontina. contratto finanziario e di investimento proposto in Francia da Lorenzo de Tonti nel 1653. Ognuno degli appartenenti alla tontina paga la quota d'ingresso, dopodiché il capitale raccolto viene investito e i partecipanti godono degli utili derivanti dagli investimenti fino alla loro morte, al momento della quale la quota di capitale viene ripartita fra i restanti. Quando tutti i partecipanti sono morti, il capitale può avere diverse destinazioni a seconda degli accordi presi.

- E599 *Solutio quaestiones ad calculam probabilitatis pertinentis quantiam disconceges persolvere debeant ut suis haeradibus post utriusque mortem certa argenti summa persolvatur. Opuscula Analytica II*, 1776

Problema di calcolo delle probabilità: quale somma deve versare oggi una coppia affinché, dopo la morte di uno dei coniugi, l'erede percepisca una certa somma di denaro.

Frammento: *Sur le calcul des rentes Tontinieres*.

- E812. *Réflexions sur une espèce singulier de loterie nommé loterie génoise*, 1763, pubblicata postuma).

Determina la probabilità di un certo numero di essere estratto.

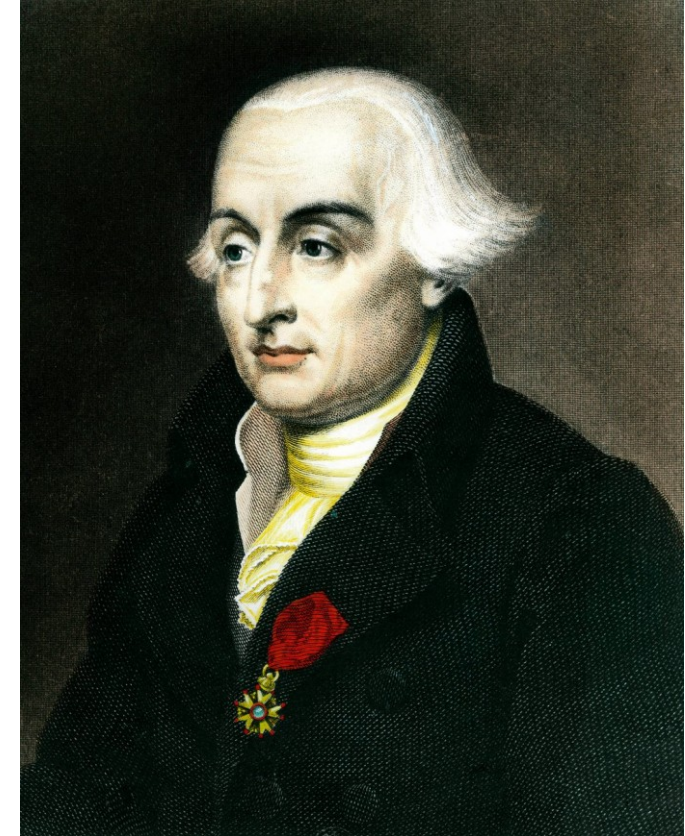
- E338. *Sur la probabilité des séquences dans la loterie génoise* Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin (1765), 1767, p. 191-230. Studia la probabilità di estrazione di varie sequenze numeriche

Joseph-Louis Lagrange (Torino, 1736 – Parigi, 1813)

A Berlino dal 1766 (prende il posto di Euler tornato a San Pietroburgo), nella classe di matematica de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres alla corte di Federico II.

Nel 1775 era stato fondato il Königlich Preußische Allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt; una ipotesi di regolamento di una cassa di risparmio per le vedove era stato pubblicato e fatto circolare tra gli accademici, sostenuto da alcuni ministri. Lagrange lo aveva esaminato, trovandolo non sostenibile secondo il calcolo delle probabilità, e aveva comunicato le sue critiche ad alcuni membri dell'Accademia. Sollecitato ad approfondire le ricerche, Lagrange scrisse allora una memoria a lungo inedita sulle rendite vitalizie che venne letta all'Accademia il 22 febbraio dell'anno seguente, in cui dimostrava che la cassa, che doveva corrispondere le pensioni e riscuotere le quote, sarebbe finita in bancarotta. In seguito Lagrange continuò a difendere le proprie idee.

Anche il senatore J.A. Kritter studiò la questione prefigurando il fallimento in pochi anni.



La cassa prussiana per le vedove prevedeva la possibilità per i mariti di assicurare alle vedove una rendita vitalizia da 25 a 1000 scudi versando una certa cifra iniziale e in seguito una somma fissa ogni anno per tutta la durata del matrimonio proporzionale alla rendita desiderata e secondo l'età del marito e della moglie.

Lagrange non voleva fornire una soluzione generale ma dimostrare, a partire dalle tabelle inserite nel regolamento proposto, che il fondo sarebbe fallito in futuro.

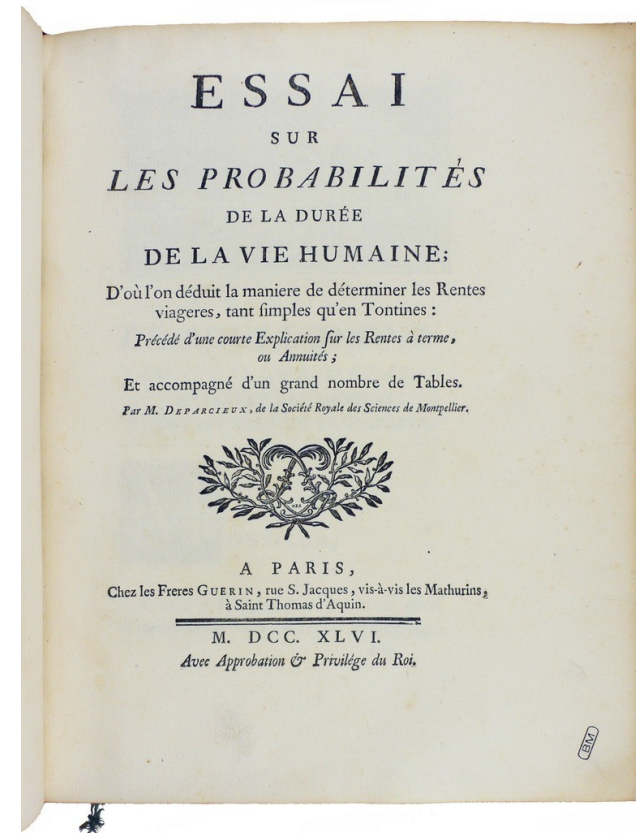
Risolve quindi il problema generale sulla base delle tavole di mortalità di Deparcieux (che per primo si occupa anche di tavole per le donne), dimostrando che il vantaggio era sempre dalla parte dell'assicurato e che più questi erano giovani più tale vantaggio diventava grande.

Il problema è enunciato così:

Una persona A di età a vuole costituire una rendita vitalizia annuale pari a r , in favore della persona B di età b , dopo la morte di A nel caso in cui B gli sopravviva.

A paga subito una cifra data p , che sarà restituita agli eredi alla morte di A o di B

A paga una somma annuale per tutta la durata del matrimonio



La soluzione è stabilita in tre modi diversi

Il primo metodo, più lungo, prevede di applicare le regole del calcolo delle probabilità, esaminando tutti i casi possibili anno dopo anno sommando i guadagni e le perdite (guadagni negativi) di A .

Utilizza la notazione di Euler rispetto al numero degli individui in vita dopo un certo numero di anni (1), (2), (3) ...

e calcola la probabilità di ogni coniuge di essere in vita dopo un fissato numero di anni.

Per poter attualizzare il valore delle cifre versate considera l'interesse composto «sola conforme alla natura e che dà risultati opportuni».

Il secondo metodo, più rapido, considera direttamente guadagni e perdite di A ogni anno nei vari casi che possono presentarsi.

Il terzo metodo, ancora più semplice, considera la somma p che si deve pagare all'inizio e da restituire dopo s anni e, visto che la rendita in favore di B inizia dopo il decesso di A , si può supporre che inizi immediatamente. Con questo artificio la questione si riduce a una più semplice.

Si suppone sempre che i pagamenti siano all'inizio dell'anno e che l'interesse sia $1/n$.

Il valore della rendita è allora ricondotto alla somma di una serie.

Confronta inoltre i risultati che si ottengono usando diverse tavole di mortalità tra quelle, numerose, disponibili all'epoca.

La *Società Italiana di Statistica* venne costituita il 15 gennaio 1939 (anche se la prima apparizione del termine sembra essere il *Ristretto della civile, politica, statistica e militare scienza* di Girolamo Ghilini, tra il 1666 e il 1668).

Nel Regno Unito la *Statistical society* era stata fondata nel 1834, dopo poco tempo anche nel Messico e negli Stati Uniti erano state fondate le prime Società nazionali di statistica e in seguito in molti paesi avanzati.

Il Regno italico era stato uno tra i primi stati europei a creare un Ufficio Statistico (nel 1807) e in uno degli Stati della penisola italiana, nel Granducato di Toscana, era stata costituita nel 1826 la *Società Toscana di Geografia Statistica di Storia naturale* presieduta dal matematico Giuliano Frullani (1795-1834)

Nella maggior parte dei ricostituiti Stati italiani i governi preferivano non usare gli strumenti che la statistica avrebbe potuto offrire ai loro atti amministrativi. Per mettere in luce la cattiva amministrazione di tali governi gli oppositori e, in particolare, "i proseliti della Giovane Italia" ne facevano invece largo uso e quindi veniva vietata la produzione e diffusione di statistiche. L'aggettivo "statistico" divenne quasi sinonimo di sovversivo e ne veniva proibito l'uso anche nei titoli dei libri. Se per il singolo era pericoloso dedicarsi alla statistica, forse poteva esserlo meno per una Associazione scientifica, ma *"un monito dell'autorità politica produsse l'effetto di far sospendere le adunanze [della Società toscana], che non furono più convocate"*; nel 1839 lo stesso Granduca ospita il Primo Congresso degli Scienziati Italiani.



Giornale dei letterati (diretto da A.Fabroni)

periodico toscano di ampia diffusione; interesse per le applicazioni della matematica anche in campi all'epoca pionieristici legati alle scienze sociali

discussione sull'ipotesi formulata da uno studioso fiorentino, esaminando i registri battesimali, che il numero dei nati sia sufficiente per stabilizzare la popolazione attuale seguendo la proporzione di quattro a cento tra i nati e la popolazione totale, proporzione che secondo il censore è stata riscontrata in diversi anni per pura casualità

Tom. XIX. Pag. 214.

In cuiita dal Sig. Lastri
è all' Anno medio

Anno 1551 50553.	dell' Ani- Tosca dei il Cenfo in un vent ello Anno	9.	La regola del 4. per 100. dà	4021. di più
Anno 1740. 59955.		1.		2241. di meno
Anno 1745. 59576.		5.		1480. di meno
Anno 1751. 57577.		1.		976. di meno
Anno 1758. 55743.		36.		4261. di meno
Anno 1761. 55673.		60.		7860. di meno
Anno 1767. 56633.		35.		7835. di meno

Digitized by Google

Tomo 19, 1775, recensione del volume *Ricerche sull'antica e moderna Popolazione della Città di Firenze per mezzo dei Registri del Battefimo di S. Giovanni dal 1451. al 1774*. Vol. I. in 4. dedicato A S. A. R. il Granduca di Toscana, Firenze, 1775 di Marco Lastri proposto del Battistero di S. Giovanni, pag. 2015-228, con 2 tavole f.t. contenenti le tabelle dei dati esaminati.

Dati ISTAT 2023: per 1000 abitanti, 6 nati e 11 decessi
(1,20 Il numero medio di figli per donna)

ARTICOLO VIII.

*Ricerche sull' antica e moderna Po-
polazione della Città di Firen-
ze per mezzo dei Registri del
Battefimo di S. Giovanni dal
1451. al 1774. Vol. I. in 4. de-
dicato a S. A. R. il Granduca
di Toscana. Firenze 1775.*

IL Sig. Dottor Marco Lastri Pro-
posto del Battistero di S. Gio-
vanni si è immaginato che il nu-
mero degli uomini che nascono in
un dato spazio d' anni in una
Città, o Provincia sia un sufficien-
te indizio per dedurne l' attual
popolazione di quella Città o Pro-
vincia appresso a poco a un pic-
colissimo sbaglio. Quindi avendo
osservato che nella sua Chiesa si
erano tenuti i registri delle nascite
dal 1451. sino ai nostri tempi, ha
creduto che questi registri sareb-
bero stati il vero termometro della
popolazione di Firenze per più di
tre secoli, e che potrebbero es-
ferlo anche in futuro, e però gli
ha pubblicati in tante tavole, che
occu-

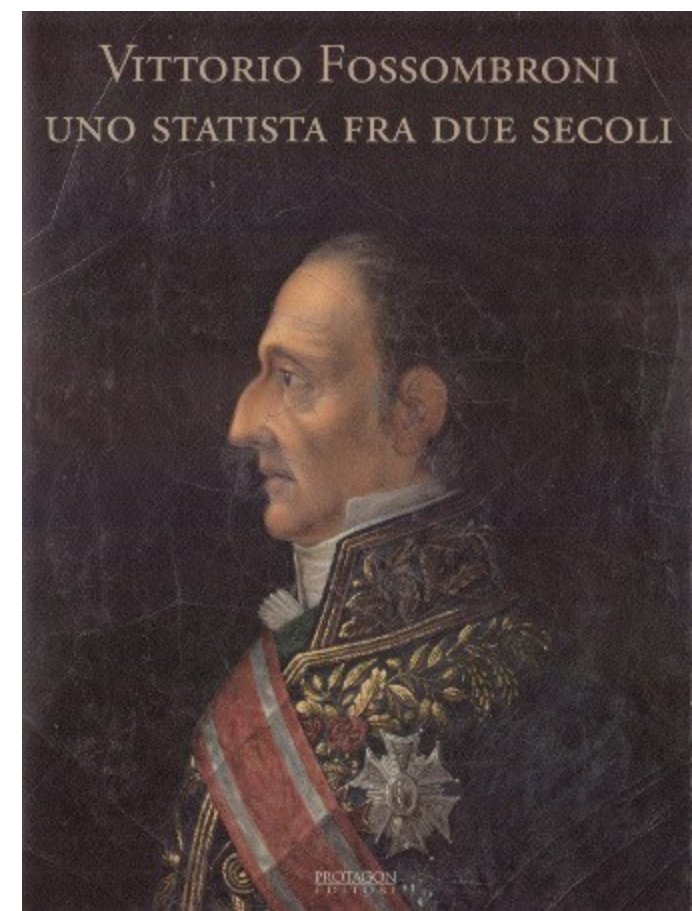
P. Paoli a V. Fossombroni, 1804

(Deputazione Economale istituita nel 1804 allo scopo di risanare il debito pubblico toscano)

Quantunque in campagna senza libri e senza tavole dei logaritmi, ho voluto eseguire questo calcolo, che da Lei a ragione si chiama molto difficile, perché ho trovato alcuni compendj di computo, e perché il calcolo fatto una volta può servire a risolvere tutti i casi simili con poche righe di numeri, ed a trovare a priori non a tentone la somma, che deve ogni anno pagarsi per ottenere l'intento.

[...] Ho supposto l'interesse semplice, perché mi è parso ciò esser coerente ai nostri usi, e perché questo era allora il sentimento della Deputazione; del resto una giornata di più bastava per fare il calcolo nella ipotesi dell'interesse composto. Lasciai senza frutto le spese dell'amministrazione, dopo di avervi lungamente pensato, per questa ragione.

[...] ma dovendo gli Azionisti rilasciare quanto occorre per le spese di amministrazione, per alcuni anni non giungeranno ad avere al netto il 5 per cento, e ciò non alletterà i concorrenti. L'interesse composto si pone dagli Scrittori Inglesi nella valutazione delle annualità, e dall'Euler nei suoi calcoli sui vitalizj; onde non è senza esempio per le altre nazioni, ma è affatto nuovo per la nostra; ed appartiene alla Deputazione il vedere, se Le convenga nelle circostanze attuali rischiare questa novità. Se nell'imprestito entra un poco d'imposizione, tutto passa.



BIBLIOGRAFIA

- Fabroni Angelo, *Elogio di Giuseppe Toaldo*, Memorie di Matematica e fisica della Società Italiana delle Scienze, 1799
- Israel Giorgio, *"Administrer c'est calculer": due "matematici sociali" nel declino dell'Età dei Lumi*, Bollettino di storia delle scienze matematiche, 1996
- Perelli D'Argenzio Maria Pia, *Storia della statistica: i momenti decisivi*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 2002
- Huff Darrell, *Mentire con le statistiche*, 2007
- Borgato Maria Teresa, *Euler, Lagrange and Life Insurance*, Leonhard Euler: 300th anniversary, 2008
- Borgato Maria Teresa, *Lagrange et les fonds de pension pour les veuves*, Bollettino di storia delle scienze matematiche, 2013
- Pozzi Lucia, *Alle origini della demografia italiana: le Tavole di Vitalità di Giuseppe Toaldo (1787)*, Popolazione e Storia, 2020
- Sito dell'Istituto Nazionale di Statistica <https://www.istat.it/>