La Storia della matematica nell'insegnamento: i metodi risolutivi delle equazioni di I e II grado nei greci e in Descartes

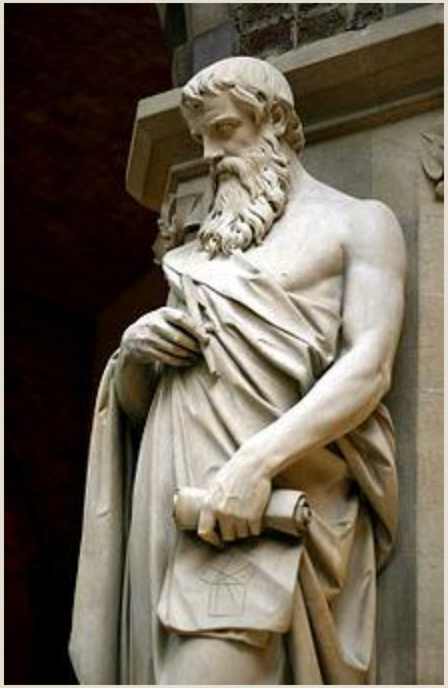
C. Cerroni

Dipartimento di Matematica ed Informatica

Università degli Studi di Palermo

Equazioni di 1° grado

Il metodo geometrico presso i Greci



La matematica greca trova la sua massima espressioni negli *Elementi* di Euclide (300 a.c.). La parte della geometria che riguarda costruzioni geometriche equivalenti a risoluzioni di equazioni o a trasformazioni algebriche è chiamata “Algebra Geometrica”.

Equazioni di 1° grado

Il metodo geometrico presso i Greci

Problemi di applicazione delle aree

Si tratta di problemi geometrici riconducibili ad equazioni di 1° e di 2° grado che Proclo (V sec.) fa risalire ai Pitagorici e che vengono affrontati da **Euclide** nel I, II e VI libro degli ***Elementi***

Equazioni di 1° grado

Il metodo geometrico presso i Greci

Prop. I 43

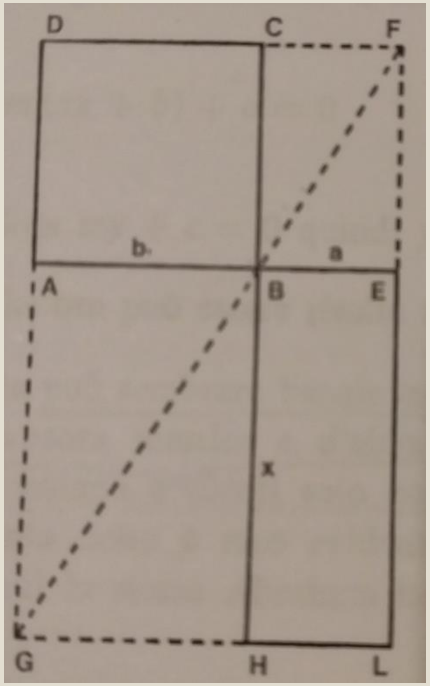
In ogni parallelogramma i complementi dei parallelogrammi [posti] intorno alla diagonale sono uguali fra loro.

Cioè dato un parallelogramma, scelto ad arbitrio un punto di una delle due diagonali e tracciate da esso le rette parallele ai lati, si ottengono quattro parallelogrammi; i due che non sono attraversati dalla diagonale scelta sono equivalenti.

Questa proposizione risolve il problema:

Dato un quadrato del quale sia nota l'area **b^2** determinare un lato del rettangolo ad esso equivalente di cui sia dato l'altro lato **a**

$$ax = b^2$$

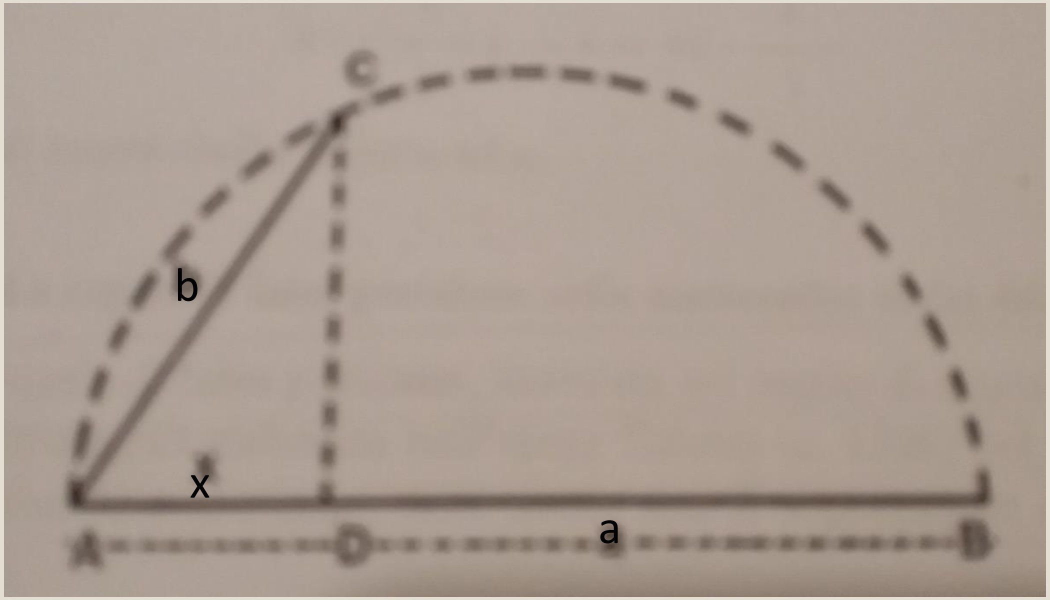


Equazioni di 1° grado

Il metodo geometrico presso i Greci

Il problema ha soluzione anche applicando il **primo teorema di Euclide**:

Prop. I 47. Primo teorema di Euclide: In un triangolo rettangolo il quadrato su un cateto equivale al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.



$$\boxed{ax = b^2}$$

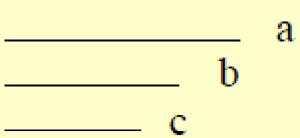
Equazioni di 1° grado

Il metodo geometrico presso i Greci

Il problema ha soluzione anche applicando il **Teorema di Talete**:

Prop. VI.12

"Date tre rette, trovare la quarta proporzionale dopo di esse" [p. 378]



Si tratta di trovare un segmento x tale che

$$a : b = c : x$$

Usando il nostro simbolismo il problema equivale a risolvere l'equazione di 1° grado

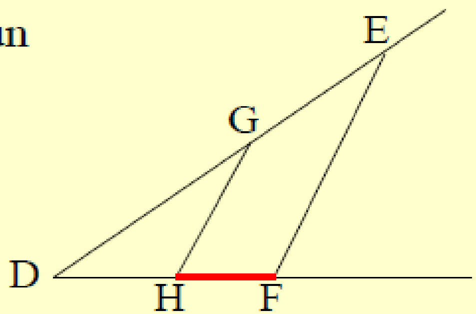
$$ax = bc$$

Si considerino due semirette DE e DF formanti un angolo qualsiasi. Si ponga DG = a, GE = b e DH = c.

Si congiunga H con G e si conduca per E il segmento EF parallelo ad HG .

Poiché nel triangolo DEF il segmento GH//EF si avrà: DG : GE = DH : **HF** .

HF è la quarta proporzionale cercata.



Equazioni di 2° grado

In Grecia

Problemi di applicazione delle aree

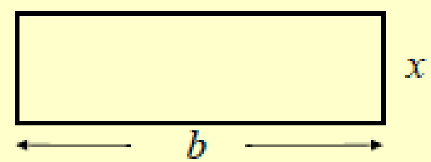
Si tratta di problemi geometrici riconducibili ad equazioni di 1° e di 2° grado che Proclo (V sec.) fa risalire ai Pitagorici e che vengono affrontati da **Euclide** nel I, II e VI libro degli ***Elementi***

Applicazione parabolica: παραβολή **= applicazione**

costruire un rettangolo di area data *S* su una base *b*.

Indicata con x l'altezza il problema si traduce per noi in un'equazione di 1° grado:

$$\boxed{bx = S}$$



36

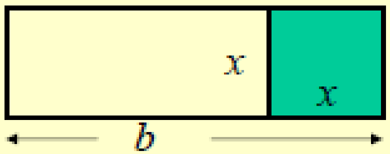
Equazioni di 2° grado

In Grecia

Applicazione ellittica o per difetto: ἔλλειψις = mancanza, difetto

costruire un rettangolo di area data S su una base $b - x$ e altezza x.
Il problema si traduce per noi in un'equazione di 2° grado:

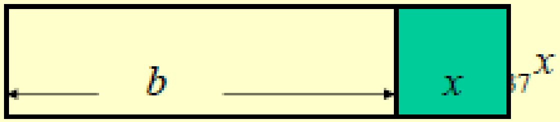
$$\boxed{(b - x)x = S}$$



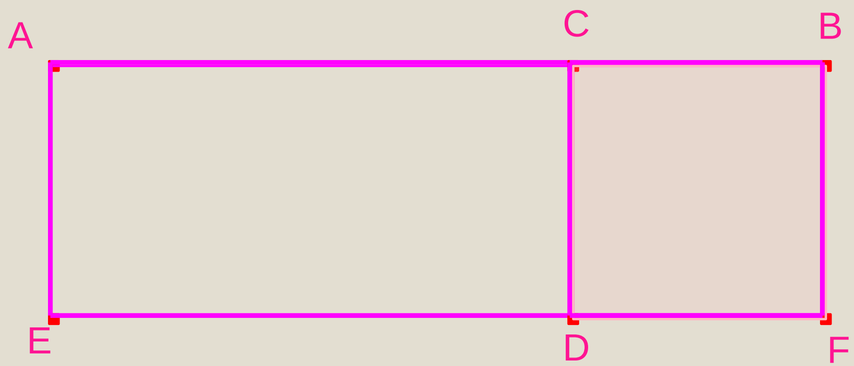
Applicazione iperbolica o per eccesso: ὑπερβολή = eccesso

costruire un rettangolo di area data S su una base $b + x$ e altezza x.
Il problema si traduce per noi in un'equazione di 2° grado:

$$\boxed{(b + x)x = S}$$



Applicazione Ellittica



Costruire un rettangolo di area data in modo che dato un segmento AB esso deve essere somma della base e dell'altezza del rettangolo stesso. Quindi, se AC è la base del rettangolo, necessariamente CB deve essere l'altezza. Così

il rettangolo ACDE applicato su AB

risulta mancante del quadrato CBFD.

Applicazione Ellittica

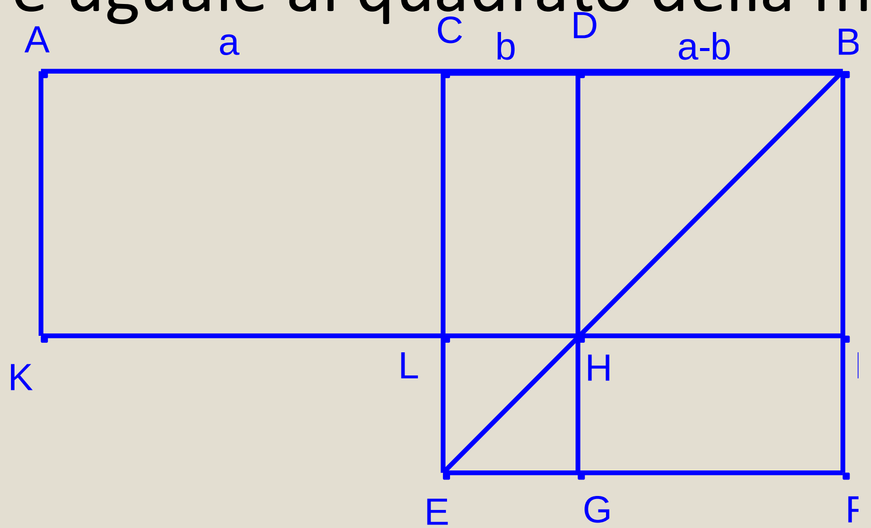
Equivale ad una equazione di II grado. In particolare se indichiamo con a la somma della base e dell'altezza, con x una delle due dimensioni e con c^2 l'area data:

$$(a - x)x = c^2$$

E' risolto dalla proposizione 5 del II libro degli Elementi di Euclide.

Proposizione II 5

Se si divide una linea retta, in parti uguali e diseguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali della retta, insieme col quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta.



R(AD, DB) + Q(CD, CD) = Q(AC, AC)

Espressione in termini geometrici della formula della differenza di due quadrati: $(a+b)(a-b)+b^2=a^2$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

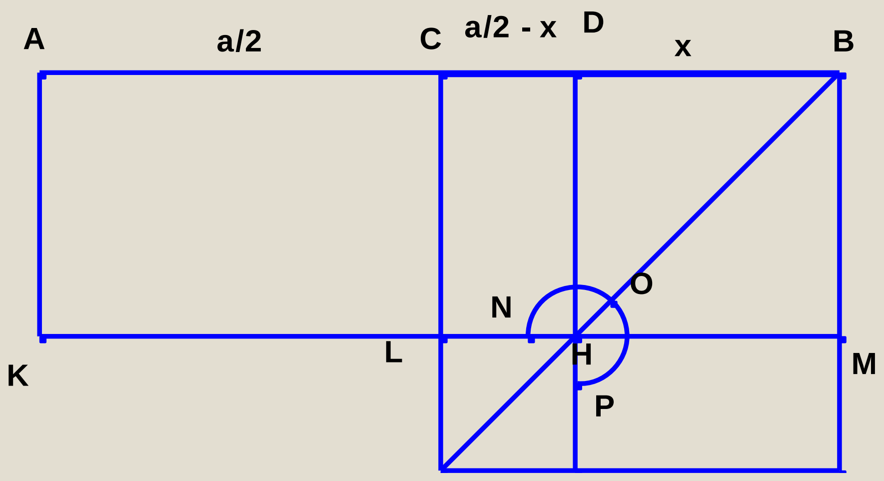
Applicazione Ellittica

Mostriamo come la prop. II 5 risolve il problema dell' applicazione ellittica.

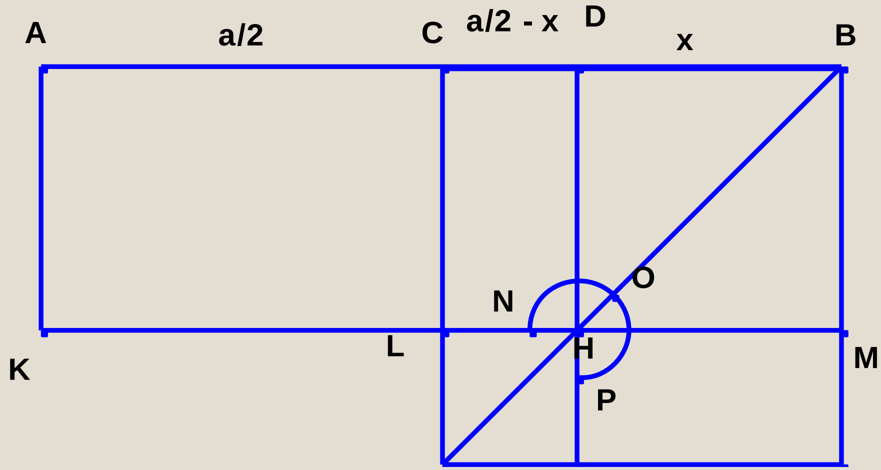
Siano:

C = punto medio di AB, DB = x, AB = a, AC = a/2,

AD = a - x, CD = a/2 – x.



Applicazione Ellittica



Si ha:

$$R(AD,DB) = (a-x)x \qquad Q(CD,CD) = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

$$Q(CB,CB) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

E quindi: $(a-x)x + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Applicazione Ellittica

Ma: $(a - x)x = c^2$

E quindi: $c^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\quad \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - c^2$

Il problema si è ricondotto a costruire un quadrato di area data $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c^2$

Da cui: $\frac{a}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c^2}$ $\quad x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c^2}$

Si è supposto x < a – x, cioè che C sia tra A e D. Se D è intermedio si ottiene la soluzione con il segno positivo.

Applicazione Ellittica

Quindi, il problema geometrico da risolvere è quello di trovare dato un segmento AB = a un punto D su AB tale che il rettangolo AD · BD sia equivalente ad un quadrato di lato c. Per la prop. II 5, qualunque sia D, detto C il punto medio di AB, si ha:

$$AD \cdot BD + CD^2 = CB^2$$

noi vogliamo:

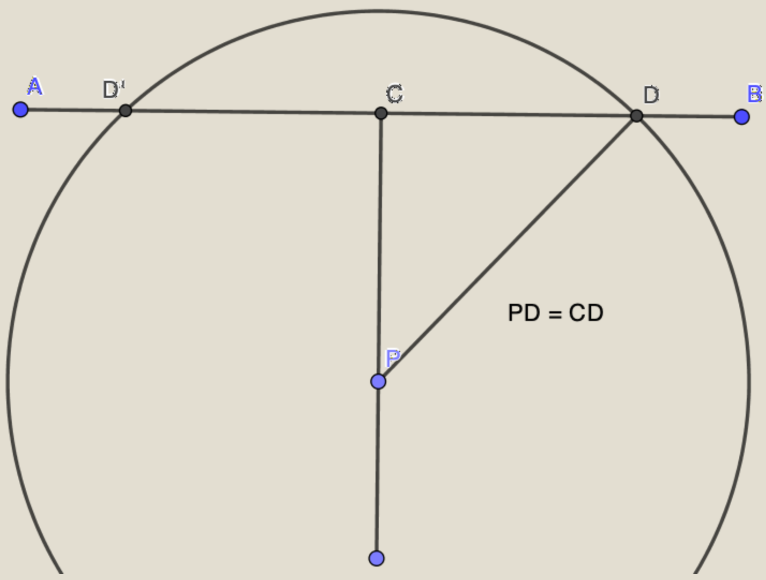
$$AD \cdot BD = c^2$$

E quindi:

$$c^2 + CD^2 = CB^2$$

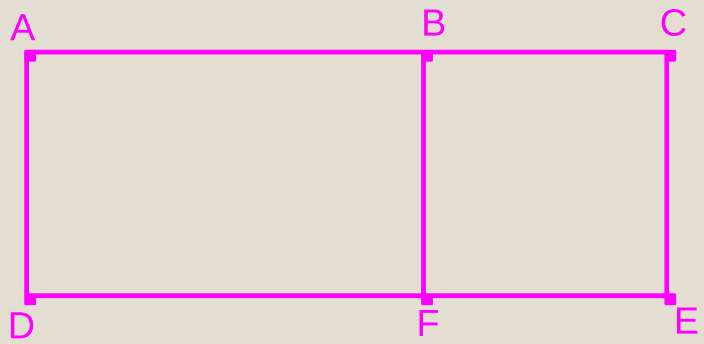
Quindi CD è il cateto di un triangolo rettangolo di ipotenusa CB e altro cateto c.

Applicazione Ellittica



Il punto D si costruisce come intersezione di una circonferenza di centro il punto P posto sull'asse del segmento AB, posto a distanza c da C e raggio CB. I punti sono due D e D'. Le due soluzioni dell'equazione. D quella positiva e D' quella negativa.

Applicazione Iperbolica



Costruire un rettangolo di area data e che abbia come lato un segmento AB che sia la differenza tra base ed altezza del rettangolo stesso. Quindi, se detto rettangolo è ACDE, la linea aggiunta BC deve essere uguale all'altezza CE del rettangolo. Il rettangolo così costruito

ACDE è dunque rispetto al rettangolo

ABFD costruito sul segmento AB in eccesso

Applicazione Iperbolica

Equivale ad una equazione di II grado. In particolare se indichiamo con a la differenza delle dimensioni, con x una delle due dimensioni e con c^2 l'area data:

$(a + x)x = c^2$ se x è la dimensione minore

$(x - a)x = c^2$ se x è la dimensione maggiore

E' risolto dalla proposizione 6 del II libro degli Elementi di Euclide.

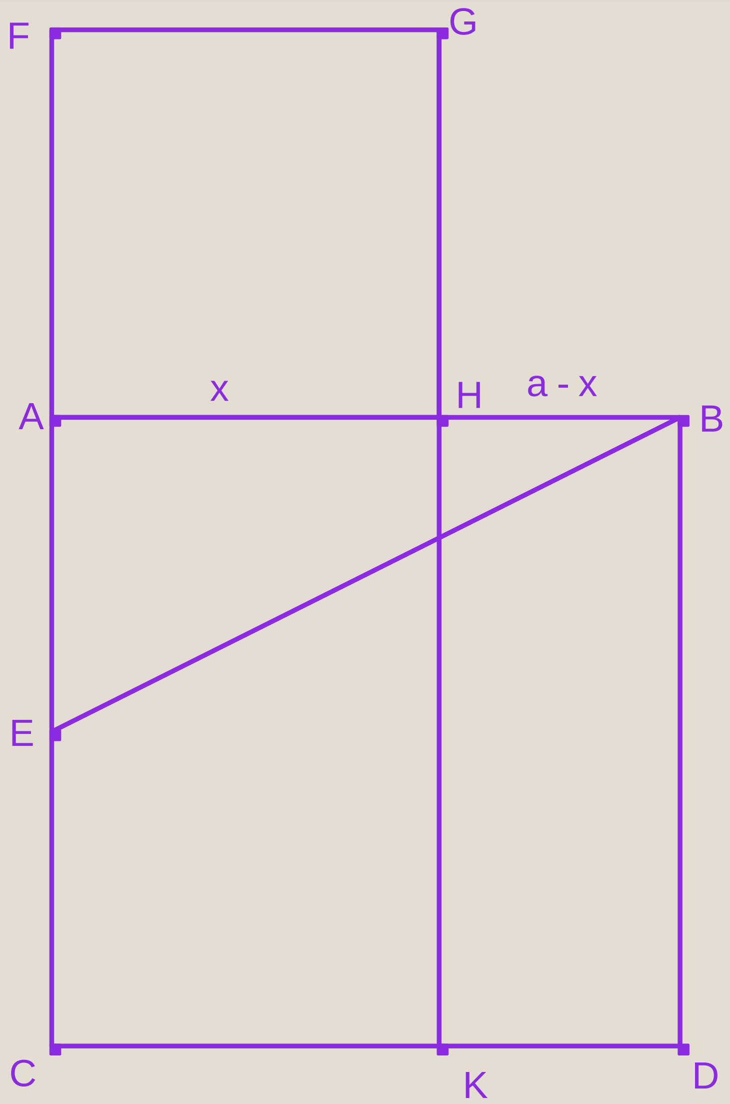
Applicazione Iperbolica

Una soluzione della: $(x - a)x = c^2$

Si ottiene anche dalla proposizione 11 del II Libro degli elementi di Euclide (sezione aurea).

Prop. II 11 Dividere una retta data in modo che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della parte rimanente.

Prop. II 11 - Sezione Aurea



Sezione Aurea

R(AB, HB) = Q(AH, AH)

Espressione algebrica:

$$a(a - x) = x^2$$

Equazioni di 2° grado

Le risoluzioni geometriche di Descartes

La risoluzione dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, quando a, b, c sono reali può presentarsi in forma geometrica in più modi, ponendo per semplicità $a = 1$ e ammettendo che b e c siano misure di segmenti. Le costruzioni possono essere eseguite con la riga e con il compasso. Inoltre, perché una radice sia costruibile, deve essere reale e positiva.

Equazioni di 2° grado

Le risoluzioni geometriche di Descartes

Quindi per la regola dei segni di Descartes, le equazioni di 2°grado costruibili sono della forma:

(1) $x^2 + ax - b^2 = 0 \quad (a > 0 , b > 0)$

(2) $x^2 - ax - b^2 = 0 \quad (a > 0 , b > 0)$

(3) $x^2 - ax + b^2 = 0 \quad (a > 0 , b > 0)$

Quest'ultima con la condizione che il discriminante sia positivo, cioè $a/2 \geq b$.

Equazioni di 2° grado

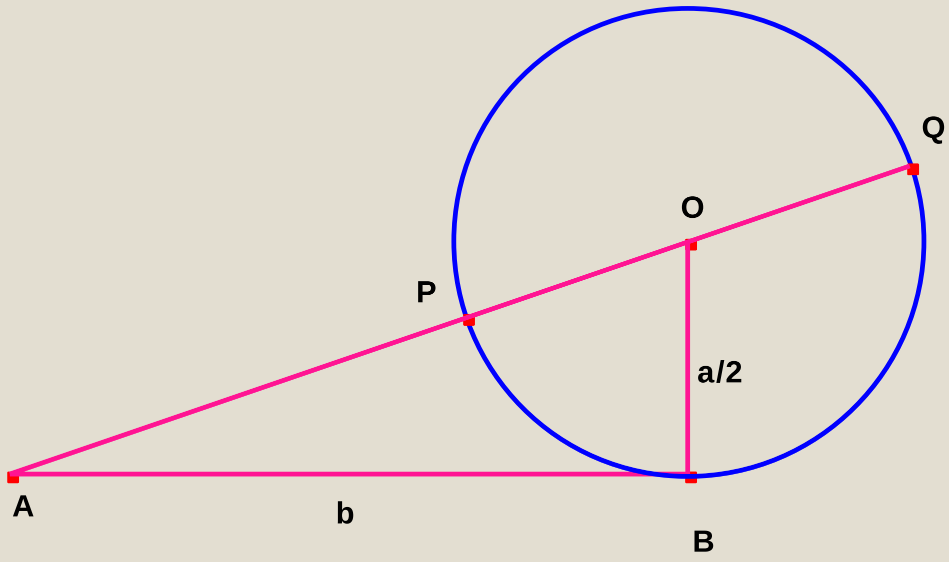
Le risoluzioni geometriche di Descartes

Costruzioni presenti nel primo libro della Geometria di Descartes (1637).

Si consideri il segmento AB = b, si conduca per B la perpendicolare ad AB e su questa si prenda un punto O, tale che OB = a/2.

Si descriva poi con centro O la circonferenza di raggio OB. Siano P. Q i punti in cui la retta AO incontra la circonferenza,

Equazioni di 2° grado



"se da un punto si conducono ad una circonferenza una secante ed una tangente, il segmento determinato dalla circonferenza sulla tangente è medio proporzionale tra i segmenti determinati sulla secante e aventi un estremo in quel punto".

Equazioni di 2° grado

Le risoluzioni geometriche di Descartes

Per il teorema della secante e della tangente:

$$AQ : AB = AB : AP$$

da cui:

$$b^2 = AP \cdot AQ$$

Quindi, posto $AP = x$, si ha $AQ = x + a$ ed AP è la soluzione dell'equazione:

$$x(x + a) = b^2$$

cioè dell'equazione: (1) $x^2 + ax - b^2 = 0$

Equazioni di 2° grado

Le risoluzioni geometriche di Descartes

Inoltre, considerato il triangolo rettangolo AOB si ha:

$$AO = x + \frac{a}{2}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad x = -\frac{a}{2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Equazioni di 2° grado

Le risoluzioni geometriche di Descartes

Scegliendo AQ = x, si ha AP = x – a e quindi AQ è soluzione dell' equazione:

$$x(x - a) = b^2$$

cioè dell'equazione: (2) $x^2 = ax + b^2$. Da cui, considerando il triangolo rettangolo AOB si ha:

$$AO = x - \frac{a}{2} \qquad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Equazioni di 2° grado

Le risoluzioni geometriche di Descartes

Per quanto riguarda l'equazione di tipo (3), Descartes fece la seguente costruzione:

Si consideri un segmento $AB = a$, sia O il punto medio. Si tracci la semicirconferenza di centro O e raggio $OA = a/2$. Si conduca la retta tangente alla semicirconferenza nel punto B, e si prenda su essa un punto P, dalla parte della semicirconferenza, tale che $BP = b$. La parallela ad AB per P incontra la semicirconferenza in due punti o in uno solo a seconda che sia $a/2 \geq b$ (condizione di realtà per le radici).

Equazioni di 2° grado

Le risoluzioni geometriche di Descartes

Sia Q uno dei punti in cui la parallela incontra la semicirconferenza. Sia S la proiezione di Q sul segmento AB e sia x la lunghezza del segmento SB. Allora si ha:

$$AS : SQ = SQ : SB$$

(teorema di Euclide)

E quindi:

$$a - x : b = b : x$$

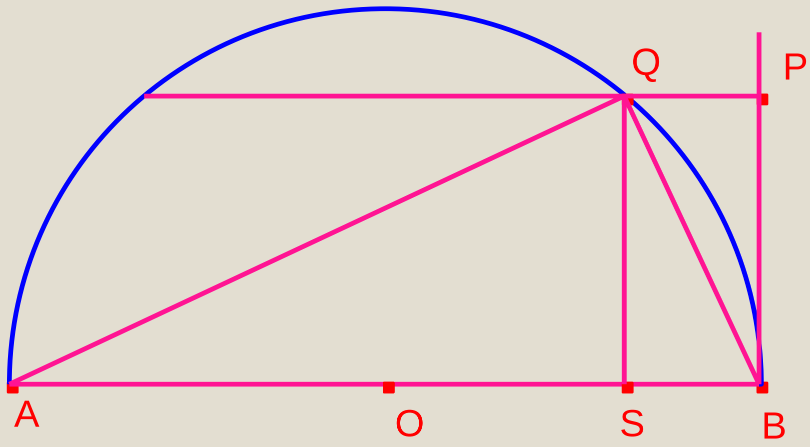
$$x(a - x) = b^2$$

Pertanto SB è uno dei segmenti richiesti. L'altro, poiché le radici hanno per somma a, è

$$AS = a - x$$

Equazioni di 2° grado

Le risoluzioni geometriche di Descartes



$AB = a$

$PB = b$

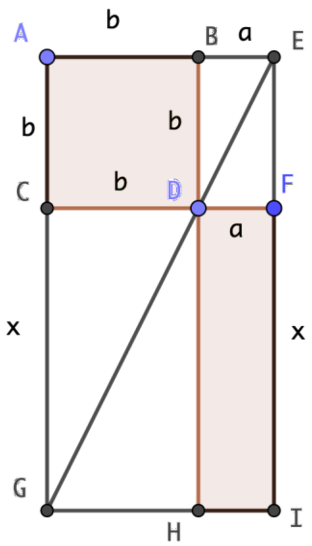
$SB = x$

$AS = a - x$

Scheda equazioni di primo grado della forma $ax = b^2$

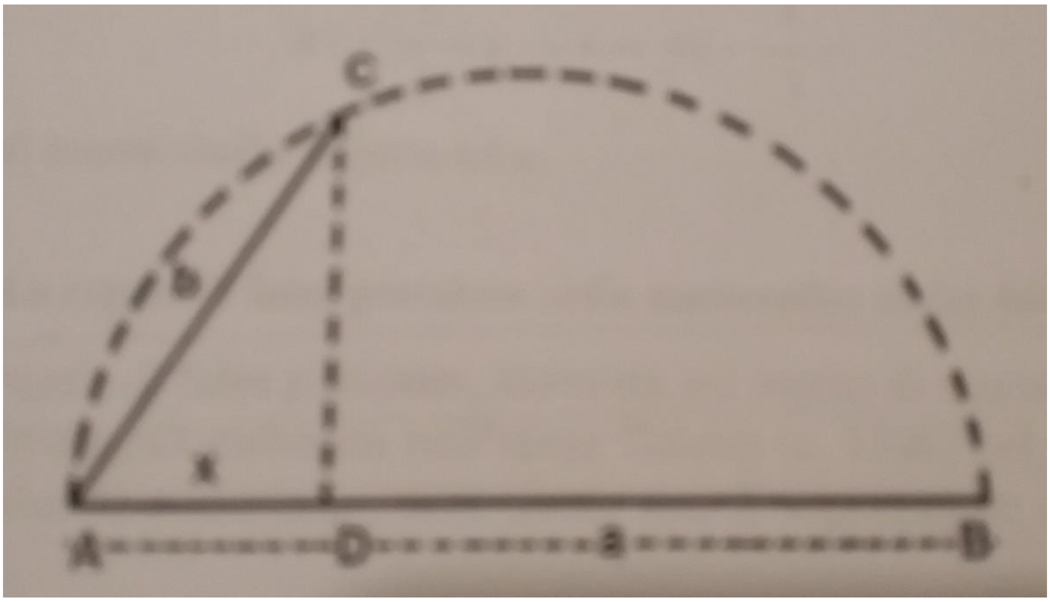
1) Costruisci un quadrato di lato b (radice quadrata di b^2) detto AB, sia ABCD il quadrato;
2) Prolunga il lato del quadrato AB di un segmento lungo a (coefficiente della x) abbiamo costruito un segmento di misura a + b, sia esso AE;
3) Traccia la retta tra il vertice E del segmento AE e il vertice D del quadrato di lato AB;
4) Determina l'intersezione G del prolungamento del lato AC del quadrato con la retta per E e D;
5) completa il rettangolo di vertici AEGI.

La soluzione dell'equazione è il lato FI del rettangolo DFHI di lato a.



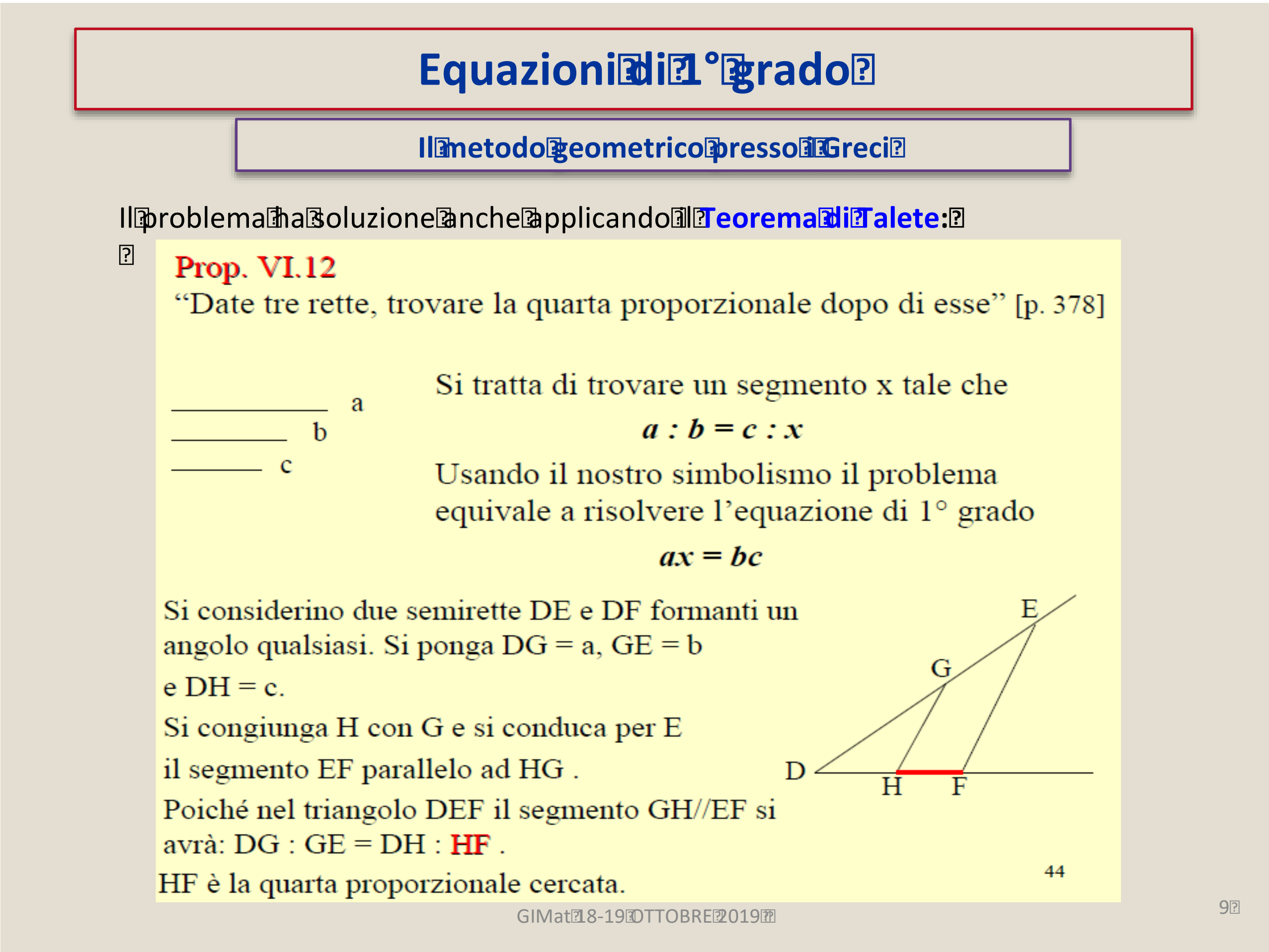
Scheda soluzione equazione $ax = b^2$ con il I teorema di Euclide

1) Costruisci una semicirconferenza di diametro a il coefficiente di x;
2) Traccia una corda lunga b (radice di b^2), che ha come estremo un estremo del diametro e che interseca la circonferenza nel punto C;
3) Completa il triangolo rettangolo di vertici gli estremi del diametro A e B e il punto C;
4) Traccia da C l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo. La proiezione del cateto AC (corda lunga b) sull'ipotenusa è la soluzione x dell'equazione.



Scheda soluzione equazione ax = bc con il teorema di Talete

1) Considera tre segmenti di lunghezza a, b e c;
2) Siano DE e DF due semirette intersecanti in D, che formino un angolo qualsiasi:
3) Si individuino dei punti G, E e H sulle semirette in modo tale che: DG = a, GE = b e DH = c;
4) Si unisca H con G e si conduca da E la retta EF parallela ad HG;
5) Il segmento HF è la soluzione x dell'equazione.



Scheda Equazioni di primo grado

a) Determina la soluzione delle seguenti equazioni, usando il metodo del completamento a rettangolo:

1) $4x = 64$
2) $5x = 27$
3) $\frac{3}{2}x = 18$
4) $3x = \frac{2}{3}$

Sugg: Costruisci un rettangolo o un quadrato di area il secondo membro dell'equazione. Prolunga il lato del quadrato/rettangolo della misura del coefficiente della x e completa il rettangolo.

b) Determina la soluzione delle seguenti equazioni, usando il teorema di Euclide:

1) $7x = 49$
2) $3x = 81$
3) $8x = \frac{1}{4}$
4) $2x = 7$

Sugg: Costruisci una semicirconferenza di diametro il coefficiente di x. Traccia la corda lunga la radice del termine noto e che ha come estremo un estremo del diametro. Completa il triangolo rettangolo. Traccia l'altezza relativa alla base (ipotenusa). La proiezione della corda (cateto) sull'ipotenusa è la soluzione.

c) Determina la soluzione delle seguenti equazioni usando il teorema di Talete:

1) $3x = 7$
2) $5x = 6$
3) $\frac{2}{3}x = 4$

Scheda Soluzioni equazioni Cartesio

$$x^2 + 4x - 9 = 0$$

1) In un piano cartesiano, traccia sull'asse x il segmento AB lungo b = $\sqrt{9} = 3$;

2) Traccia la retta t perpendicolare ad AB per B;

3) Stacca sulla retta t a partire da B un segmento OB lungo a/2 = 2;

4)Traccia la circonferenza di centro O e raggio OB = 2

5) Traccia la retta AO;

6) Siano P e Q le intersezioni della retta AO con la circonferenza.

7) AP e – AQ sono le soluzioni

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

1) Traccia un segmento AB lungo a = 4;

2) Sia O il punto medio del segmento AB. Traccia la semicirconferenza di centro O e diametro AB;

3) Traccia la retta t tangente a B (traccia la perpendicolare ad AB per B);

4) Stacca sulla retta t a partire da B un segmento lungo b = $\sqrt{3}$, sia P il punto individuato;

5) Traccia la retta s per P parallela ad AB. Tale retta interseca la semicirconferenza in due punti. Sia Q uno di essi.

6) Sia S la proiezione di Q su AB. Il segmento SB e il segmento AS sono le soluzioni dell'equazione.