Società Italiana di Storia delle Matematiche - APS

Università degli Studi di Ferrara | Dipartimento di Matematica e Informatica

BOTTI DI VINO E CALCOLO DI VOLUMI NELL’OPERA DI KEPLER

M. Giulia Lugaresi (Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 9 maggio 2025

Johannes Kepler (Weil der Stadt, 1571 – Regensburg, 1630), tedesco.

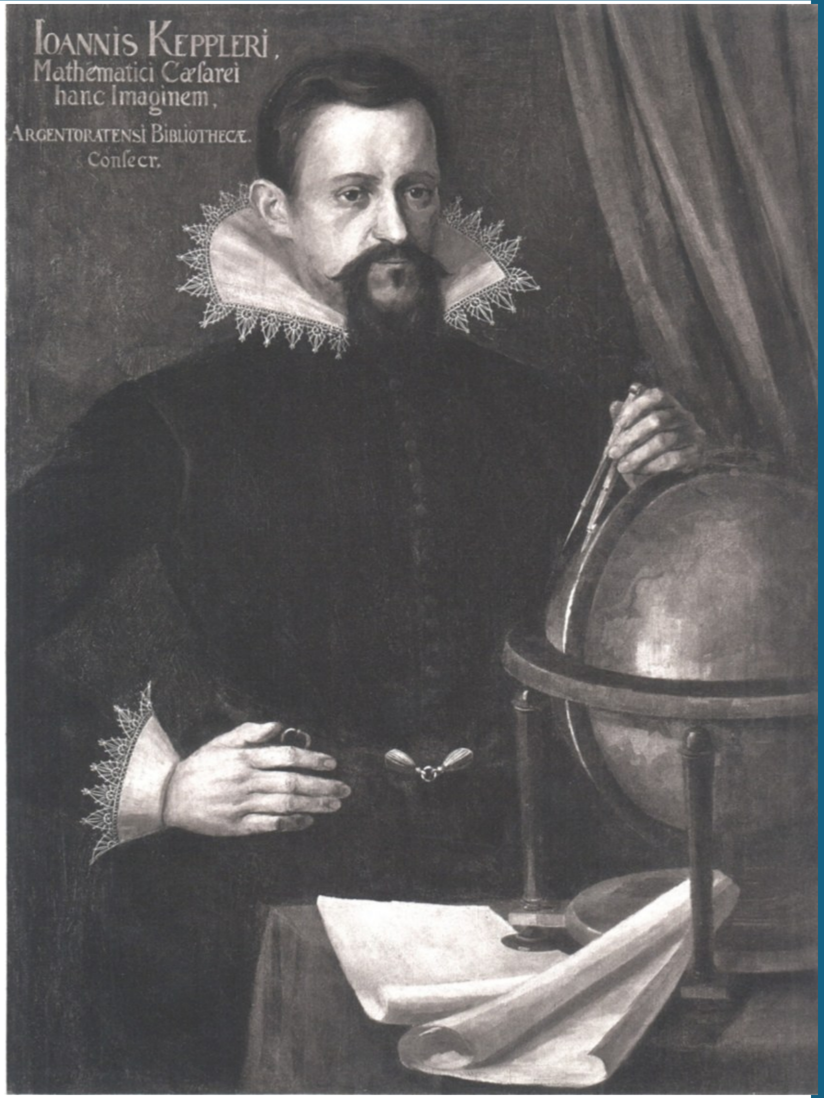
1589. Viene ammesso allo *Stift*, il monastero di **Tubinga**, dove si dedica a studi di filosofia, matematica e teologia. Il suo **professore di matematica e astronomia** è **il copernicano Michael Maestlin**.

1594. Chiamato a Graz come professore di matematica.

1596. Pubblica la sua prima opera, il ***Mysterium cosmographicum***.

1600. Obbligato a lasciare Graz per motivi religiosi, Kepler raggiunge Tycho Brahe a **Praga** e nel 1601, alla sua morte, gli subentra nella carica di matematico dell'imperatore Rodolfo II.

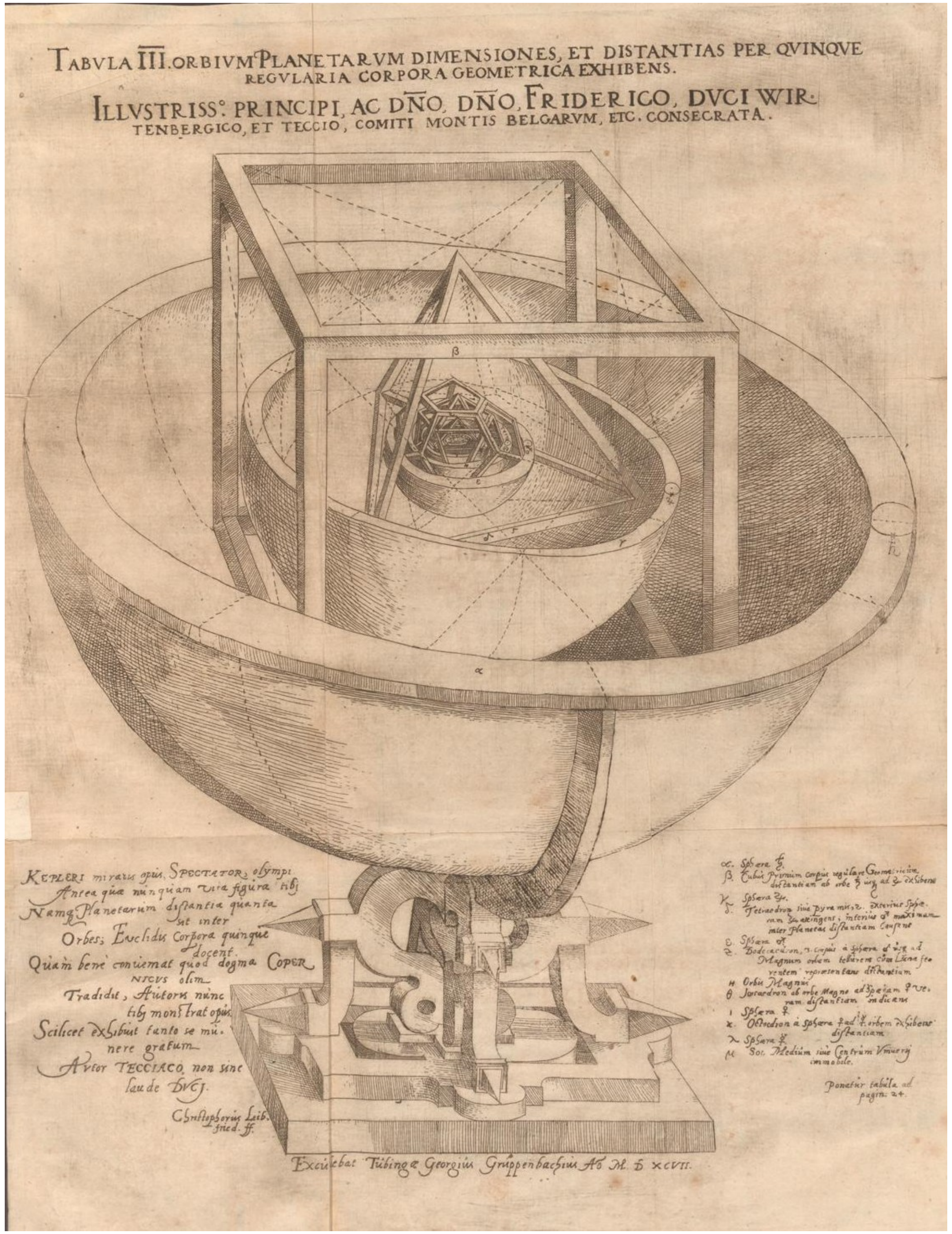
1609. Kepler formula le sue due prime leggi nell'***Astronomia nova***.



Mysterium cosmographicum (1596)

*L’orbita terrestre è la misura di tutto: se ad essa si circoscrive un **dodecaedro**, la circonferenza che lo contiene sarà Marte, circoscrivendo a Marte un **tetraedro**, la circonferenza che lo contiene sarà Giove; circoscrivendo ad un **cubo**, la circonferenza che lo contiene sarà Saturno. Se si inscrive nella Terra un **icosaedro**, il cerchio inscritto sarà Venere, se in Venere si inscrive un **ottaedro**, il cerchio in esso contenuto sarà Mercurio.*

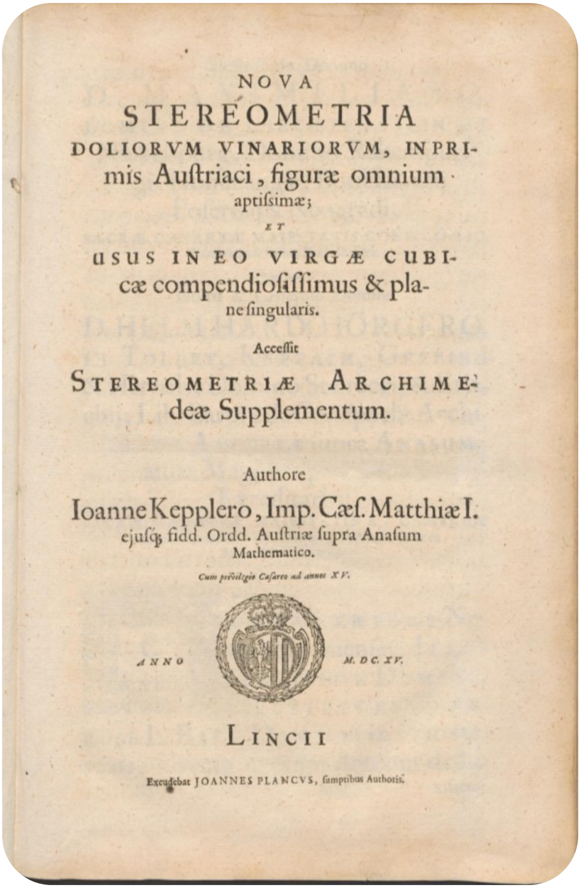
Mysterium Cosmographicum, c. 25



1611. Pubblica la *Strena seu de nive sexangula* (1611).

1612-1626. In seguito alla cacciata dei luterani da Praga, si trasferisce a **Linz**, dove pubblicherà alcuni dei suoi lavori più importanti:

- ***Nova stereometria doliorum vinariorum … (1615)***
- *Epitome astronomiae copernicanae* (1617-21, 7 volumi)
- *Harmonices mundi* (1619, 5 libri)


NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORVM VINARIORVM, INPRI-
mis Auſtriaci, figuræ omnium
aptiſsimæ;
ET
USUS IN EO VIRGÆ CUBI-
cæ compendioſiſſimus & pla-
ne ſingularis.
Acceſſit
STEREOMETRIÆ ARCHIME-
deæ Supplementum.
Authore
Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I.
ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum
Mathematico.
Cum privilegio Cæſareo ad annos XV.
ANNO M. DC. XV.
LINCII
Excudebat JOANNES PLANCVS, ſumptibus Authoris.

1626-1630. Numerosi viaggi tra Ulm, Sagan e Regensburg, dove muore all'età di 59 anni.

Nova stereometria doliorum vinariorum (1615), Prefazione all'opera

xiſſem; tempore tali, quando Auſtria, vindemiâ copioſâ, nec minus generoſâ collectâ, plurimis onerarijs adverſo

Dopo una vendemmia abbondante e generosa

potu proſpicerem. Dolijs igitur aliquot domum illatis & conditis, poſt dies quatuor venit venditor cum virga menſoria, qua vnâ & eâdem cados promiſcuè omnes exploravit ſine diſcrimine, ſine reſpectu figuræ, ſine ratiocinatione vel calculo. Demiſſa enim

Dopo quattro giorni il venditore venne ***con un'asta di misurazione. Con quella e quella solamente*** *egli indiscriminatamente e indifferentemente* ***esplorò tutti i recipienti di vino*** *trascurando la forma e senza raziocinio o calcolo.*

Nova stereometria doliorum vinariorum (1615), Prefazione all'opera

tiocinatione vel calculo. Demiſſa enim acie virgæ aeneâ in orificium infuſorium pleni cadi tranſverſim ad calcem vtriuſque orbis lignei, quos fundos vernaculo vſu dictitamus, poſtquàm vtrinq; æqualis apparuit hæc longitudo à ventris ſummo ad vtriuſq; circularis Tabulæ imum: de nota numeri, quæ erat impreſſa virgæ eo loco, quo deſinebat hæc longitudo, pronunciavit numerum amphorarum, quos caperet cadus: ſecundum quem numerum ratio fuit inita precij.

Mirari ego, ſi tranſverſa linea per corpus dimidij cadi ducta argumentum eſſe poſſet capacitatis; dubitare etiam de fide huius dimenſionis; cum

Metteva diagonalmente la punta di un'asta graduata nel buco di riempimento del barile, attraversandolo fino ad arrivare al tallone [fondo, «calcem»] *di entrambe le coperture circolari di legno che chiamiamo comunemente fondi, e dopo che questa lunghezza rilevata dal punto più alto della pancia («a ventris summo») al più basso di entrambi i talloni circolari («ad utriusque circularis tabulae imum») era la stessa, egli* [il venditore] *dava il numero di anfore contenute nei barili dopo aver letto il numero impresso nell'asta graduata nel punto in cui questa lunghezza terminava. Il prezzo fu calcolato in base a questo numero.*

Rimasi stupito che la linea obliqua segnata attraverso il volume *(«corpus»)* ***di metà del recipiente potesse essere una caratteristica della capacità****; dubitavo anche dell'affidabilità di questa misura …*

Nova stereometria doliorum vinariorum (1615), Prefazione all'opera

Cùm igitur didiciſſem, uſum hunc
virgæ tranſverſalis publica hic authori-
tate ſtabilitum, & juratam illi menſorũ
fidem: viſum eſt non inconveniens no-
vo marito, novum Mathematicorum
laborum principium, certitudinem hu-
ius compendioſæ, & ad rem familia-
rem perneceſſariæ dimenſionis ad leges
Geometricas explorare, fundamentaq;,
ſi quæ eſſent, in lucem proferre.

Dunque quando ho imparato che qui questo utilizzo dell'asta diagonale era stato stabilito dall'autorità pubblica, e che i misuratori avevano prestato giuramento ad esso, sembrò non essere sconveniente per un nuovo marito esplorare, secondo leggi geometriche («ad leges Geometricas»), un ***nuovo fondamento per la certezza matematica di questa misurazione*** *abbreviata, davvero necessaria per il patrimonio, e per portare alla luce i suoi fondamenti, se ce ne fossero.*

Nova stereometria doliorum vinariorum (struttura dell'opera)

L'opera è divisa in tre parti:

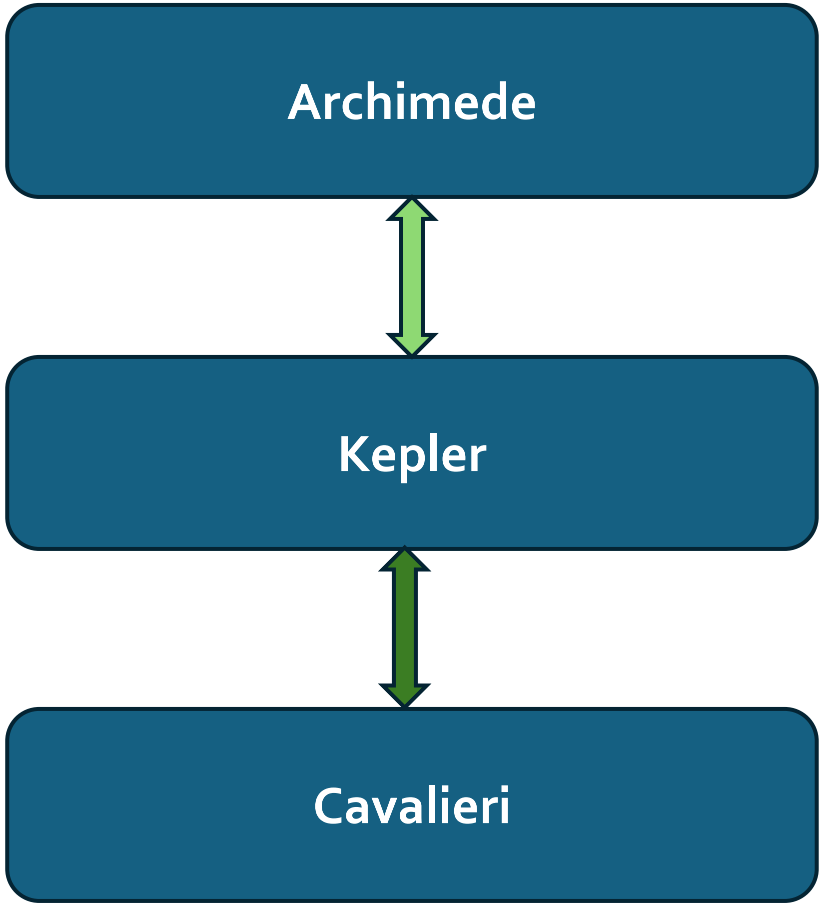
1° parte. ***Geometria solida dei corpi curvi regolari*** (30 teoremi)

- Teoremi 1-17: geometria piana e solida di Archimede
- Teoremi 18-30 (*Supplemento ad Archimede*): volumi di superfici di rotazione come mele, cedri e fusi

2° parte. ***Geometria solida della botte austriaca***, *in particolare a quale tipo di figura trattata in precedenza appartiene la botte austriaca* (29 teoremi)

3° parte. ***Uso dell'intero libro sulle botti*** (5 sezioni)

Spunti didattici per la lettura dell'opera di Kepler



Due metodi, uno stesso teorema

- Archimede, *Misura del cerchio*, Proposizioni 1-2
- Kepler, *Nuova stereometria*, Teorema II

Oltre Archimede

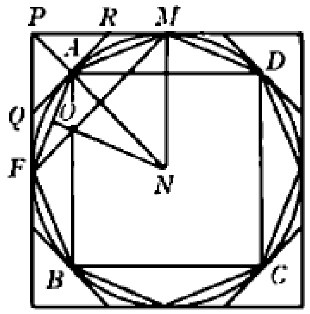
- Kepler, *Nuova stereometria*, Teorema XXII
- Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, Libro III, Proposizione XXXIV e suoi corollari

DUE METODI, UNO STESSO TEOREMA

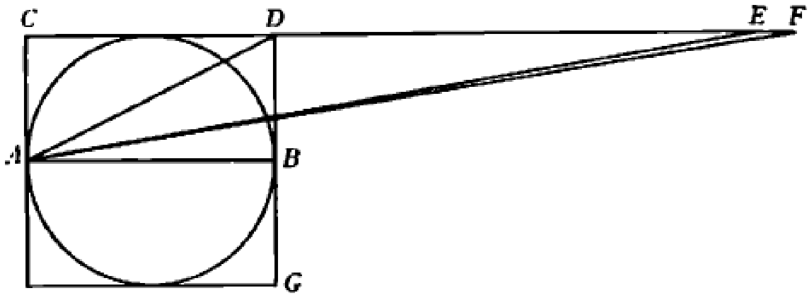
Kepler e Archimede a confronto

Archimede, *Misura del cerchio*

Proposizione 1. *Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto* [del triangolo] *e la circonferenza uguale alla base* [= all’altro cateto]



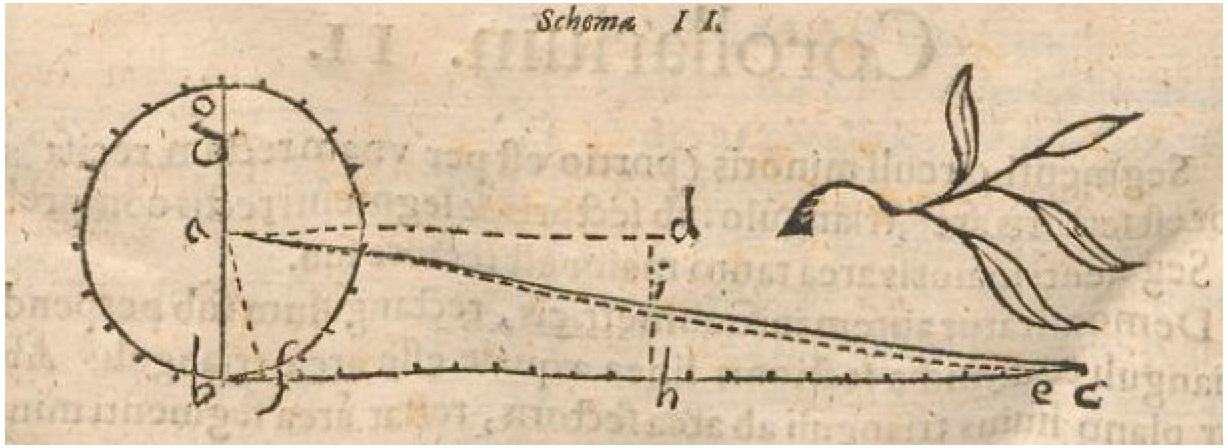
Proposizione 2. *Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14.*



1° parte (1° sezione)

Nella **prima sezione (Teoremi 1-17)** Kepler studia i rapporti tra aree e volumi delle figure piane e solide già considerate da Archimede, tra cui i cinque solidi ottenuti mediante la rotazione delle coniche attorno al proprio asse di simmetria (sfera, conoide parabolico, conoide iperbolico, sferoide oblungo e sferoide schiacciato).

Teorema 2. *L'area del cerchio confrontata con quella del quadrato ha lo stesso rapporto di 11 a 14*.



La circonferenza di diametro BG ha tante parti quanti sono i punti, considerati ***infiniti****, ciascuna delle quali è considerata come base di un triangolo isoscele, con i lati uguali ad AB. Siccome i triangoli contenuti nell'area del cerchio sono infiniti, lo sono anche i triangoli considerati, aventi vertice in A.*

OLTRE ARCHIMEDE

Solidi di rivoluzione in Kepler e Cavalieri

1° parte (2° sezione)

Nella **seconda sezione, *Supplemento ad Archimede* (Teoremi 18-30)** Kepler dimostra teoremi riguardanti solidi di rotazione che applicano metodi dimostrativi diversi rispetto a quelli utilizzati nella *Stereometria Archimedea*.

Estende l'analisi ad altri **87 solidi** (in aggiunta ai 5 ottenuti da Archimede), ottenuti mediante la rotazione delle sezioni coniche attorno ad assi di rotazione paralleli o perpendicolari a quello di simmetria.

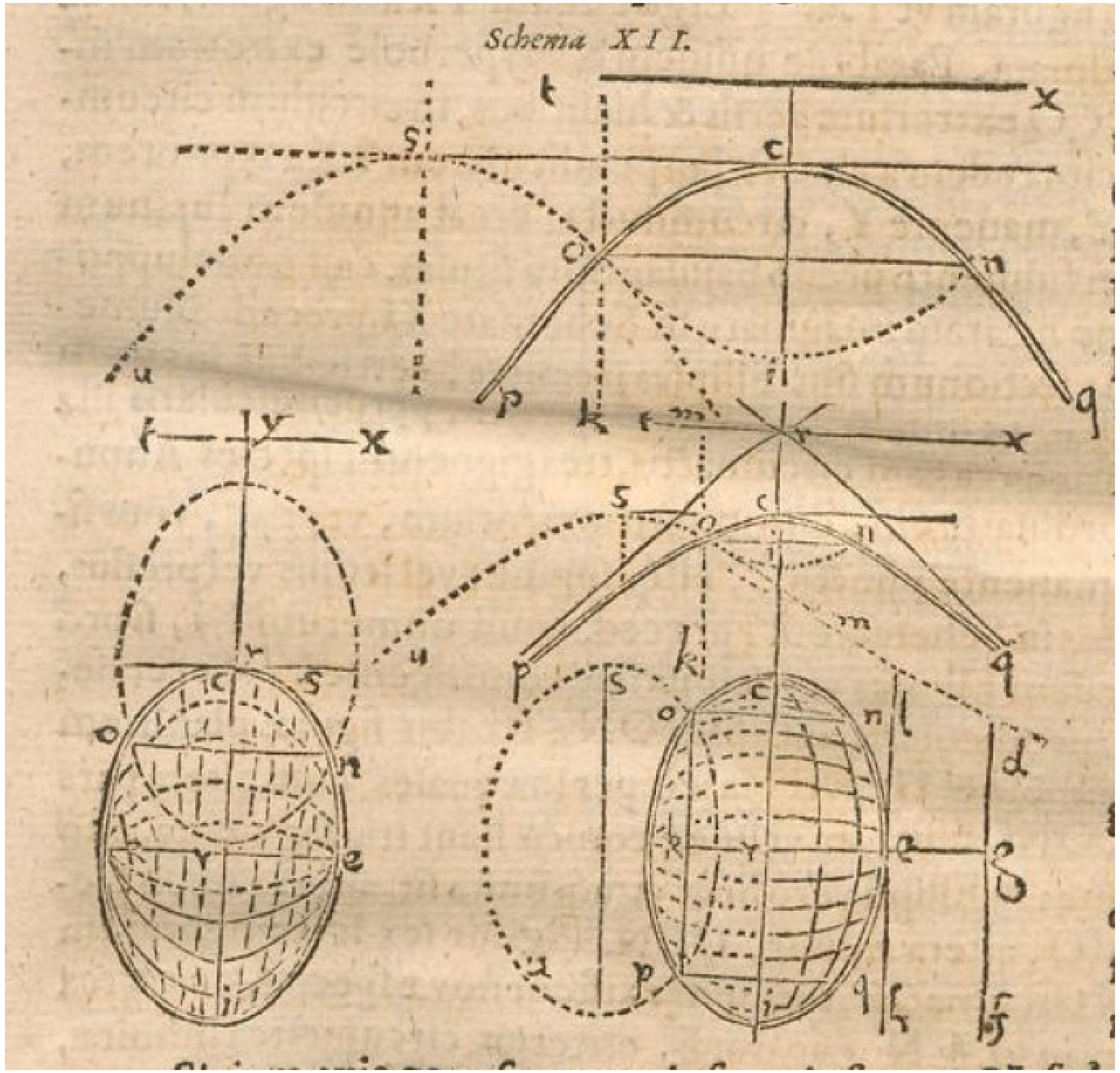


Figura di riferimento per i solidi generati dalla rotazione delle tre coniche (ellisse, parabola e iperbole). Kepler, *Nova stereometria*, c. 40.

Kepler e Cavalieri a confronto: solidi di rotazione

Solidi generati dalla rotazione di una circonferenza.

Kepler considera **5 tipi di rotazione**:

I. Attorno ad una retta esterna, parallela all'asse di simmetria – **anello «aperto»** (nel quale c'è uno spazio di centro A)
II. Attorno ad una retta tangente alla figura e parallela all'asse – **anello chiuso**
III. Attorno ad una retta secante la figura in parti diverse, parallela all'asse, ruotando il segmento circolare maggiore si genera un solido che è cavo nei due punti opposti (M, N) ed è a forma di **mela**
IV. Se l'asse passa per il centro, si genera la **sfera**
V. Attorno ad una retta secante la figura in parti diverse, parallela all'asse, ruotando il segmento circolare minore, si genera un solido che è acuto nei due estremi opposti (C, B) ed è a forma di **cedro**

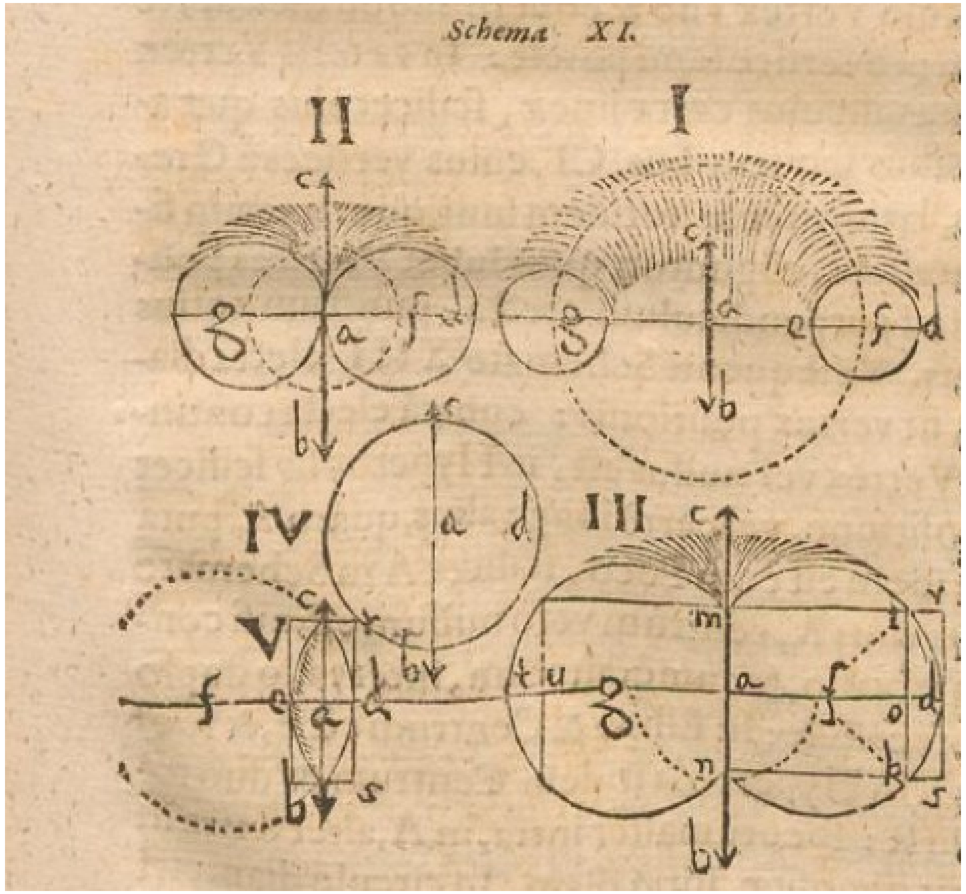


Figura di riferimento per i solidi ottenuti dalla rotazione della circonferenza. Kepler, *Nova stereometria*, c. 38.

Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle figure quello di indagare prima i rapporti delle linee in luogo di quello dei piani, e i rapporti dei piani in luogo di quello dei solidi, per procurarmi poi la misura delle figure stesse.

*[...] io stesso mi sono avvalso, per investigare la misura dei continui, **dell'insieme degli indivisibili, linee o piani**, benché, per quanto concerne il numero di essi, innominabile, assurdo e ignoto, tuttavia racchiuso in ben visibili limiti per quanto concerne la sua grandezza. [...]*

*Mi sono invero proposto, o Geometra, in questi sette libri, di **trovare la dimensione del maggior numero possibile di figure, tanto piane che solide**; di queste alcune erano state studiate da Euclide e Archimede, le altre invece non erano state fino a qui affrontate da nessuno, che io sappia, con l'eccezione del solo **Keplero**, il quale, **trattando della botte austriaca** da misurarsi con una canna metrica, dopo aver passato sommariamente in rassegna le cose scoperte da Archimede che gli erano necessarie, giustappose quella parte che denominò Supplemento alla Stereometria Archimedea, nella quale, dopo aver considerato la molteplice rivoluzione attorno ai diversi assi delle sezioni coniche, nonché di loro porzioni, **comunicò ai geometri** con un elegantissimo bando **ottantasette solidi**, oltre ai cinque Archimedei (e cioè la sfera, il conoide parabolico, il conoide iperbolico, lo sferoide oblungo e schiacciato).*

Bonaventura Cavalieri, Prefazione alla *Geometria degli indivisibili*

Kepler e Cavalieri a confronto: solidi di rotazione

B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili,* Libro III

TEOREMA XXXIII. PROPOSIZIONE XXXIV.

Solidi quali si vogliano mutuamente similari, generati dalle figure sopra considerate in questo libro III, rispetto ai riferimenti ivi stesso scelti, delle quali si sia trovato il rapporto di tutti i quadrati, hanno tra di loro un rapporto noto.

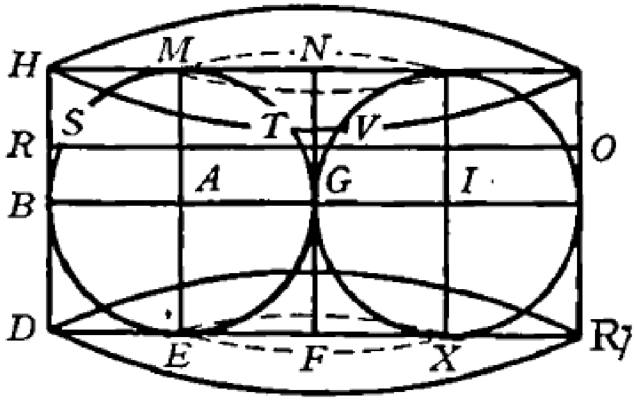
Nei **29 corollari** che seguono la Proposizione 34, Cavalieri propone numerose applicazioni del suo metodo (solidi generati dalla rotazione di cerchi, ellissi o sezioni di essi).

B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, Libro III, Prop. XXXIV, Corollario XIII

Kepler e Cavalieri a confronto: solidi di rotazione

COROLLARIO XIII.

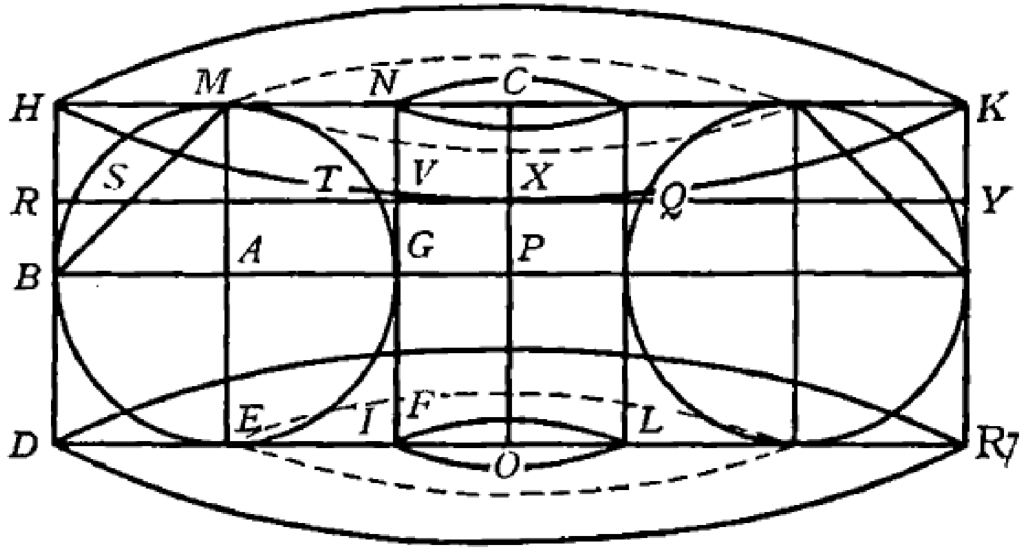
Nella prop. XIII deduciamo che un solido similare generato da *HF* sta ad un solido similare generato dalla figura *NMBEF*, tolti i solidi similari generati dai triangoli mistilinei *MNG*, *GFE*, come *HF* sta al circolo, o ellisse, *MBEG*. Si ruoti *HF* attorno a *NF* fissa, come sopra: da *HF*, dunque, si forma il cilindro *HR7*, e dalla figura *NMBEF* si forma una certa figura, dalla quale se si portano via i solidi, che vengono formati dai due triangoli mistilinei *MNG*, *GFE*, rimarrà una certa figura che chiameremo anello chiuso[26] circolare, se *MBEG* è un circolo, [anello chiuso] ellittico invece, se è una ellisse; e risulterà chiaramente quale rapporto abbia il cilindro *HR7* a questo anello chiuso, *AI*, così come in generale risulta chiaro dalle cose sopra dette quale rapporto abbia un solido similare generato da *HF* ad un solido ad esso similare generato dalla figura *NMBEF*, tolti i solidi similari generati dai triangoli mistilinei *MNG*, *GEF*.



B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili,*
Libro III, Prop. XXXIV, Corollario XIV

Kepler e Cavalieri a confronto: solidi di rotazione

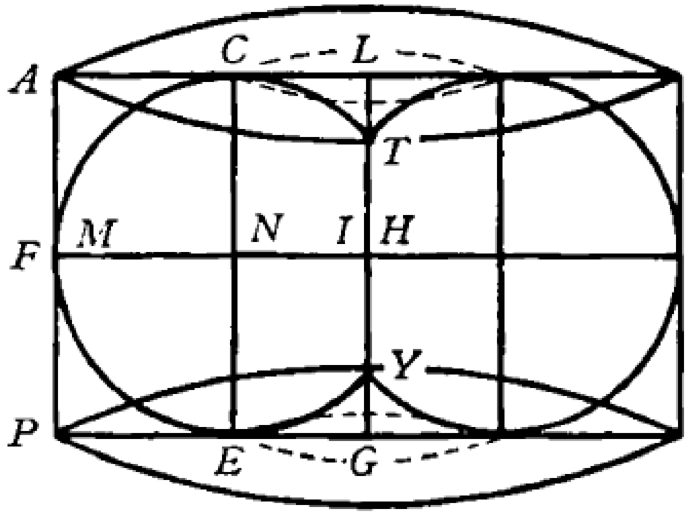
MGEOC, come sopra abbiamo detto. Il solido poi, che nell'esempio sopra detto, e nella figura, viene generato dalla rivoluzione di un



circolo, o di una ellisse, *MBEG*, si chiamerà *anello aperto circolare*, se *MBEG* è un circolo[27], oppure *anello aperto ellittico*, se *MBEG* è una ellisse.

B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, Libro III, Prop. XXXIV, Corollario XIX

Kepler e Cavalieri a confronto: solidi di rotazione



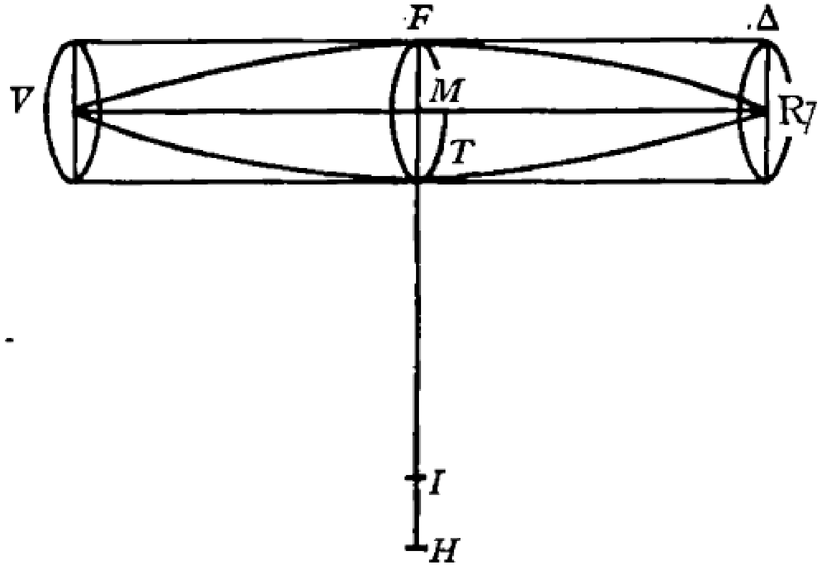
parallelogramma AG, per altezza FI, sta al solido cilindrico avente per base la porzione $TCFEY$, per altezza MI, insieme con quella parte del cubo di TY, oppure (fatto descrivere dalla TY un rombo, come nel teorema XXI) del parallelepipedo costruito su TY e su detto rombo, alla quale la sesta parte del medesimo cubo, o parallelepipedo, sta come il quadrato del primo asse, CE, al quadrato del secondo, ossia al quadrato di FH. Sia, dunque, costruito l'esempio per mezzo della rivoluzione di AG attorno all'asse fisso LG; sia $CFEH$, dunque, un circolo, oppure una ellisse, il cilindro generato da AG avrà il rapporto sopra detto al solido generato dalla porzione $TCFEY$. Si chiami poi *frutto di mela* il solido descritto dalla porzione $TCFEY$ (se essa è una porzione di circolo), *mela cotogna* se invece è una porzione di ellisse.

B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, Libro III, Prop. XXXIV, Corollario XX

Kepler e Cavalieri a confronto: solidi di rotazione

Corollario XX.

Nella prop. XXIII, presa dalla figura del teorema XXI, comunque, una porzione minore, RFV, la quale sia una porzione di circolo,



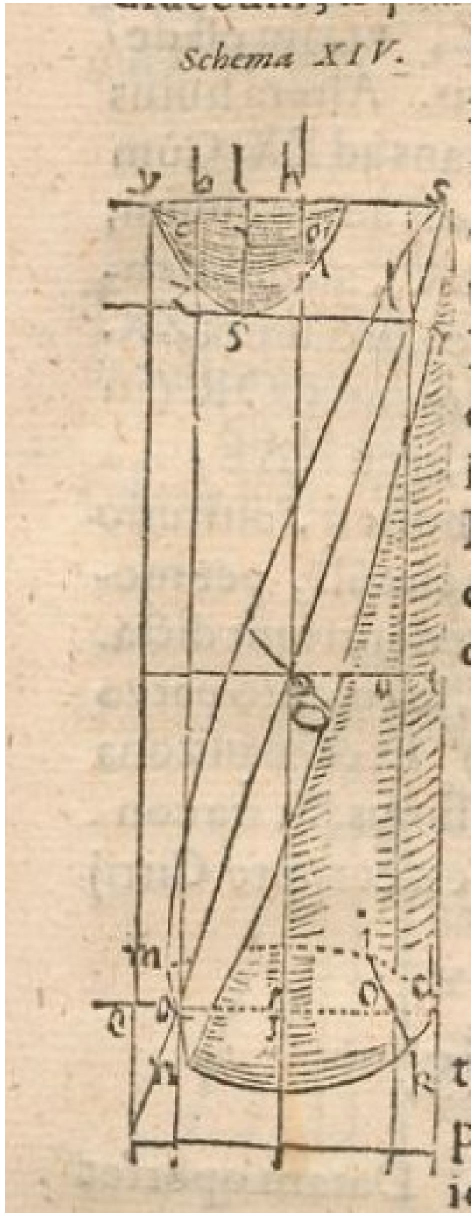
con il rettangolo ΔV ad essa circoscritto, preso anche l'intero asse FH, e il punto ω su di esso così come ivi è stato preso, è evidente che il solido similare generato da ΔV sta al solido ad esso similare generato dalla porzione minore, RFV, come una volta e mezza FM sta a $M\omega$. Si faccia ruotare dunque, per ottenere il nostro esempio, ΔV, attorno a RV, fissa; allora il cilindro descritto da ΔV starà al solido descritto dalla porzione RFV come una volta e mezza FM sta a $M\omega$, e così [andranno le cose] per i rimanenti solidi similari generati da essi ecc. Si chiami poi *frutto di cedro* il solido descritto attraverso la sua rivoluzione dalla porzione minore del circolo, RFV.

1° parte (2° sezione)

Nei **Teoremi 18-30** Kepler determina i volumi dei solidi di rotazione da lui descritti precedentemente. Proponiamo un paio di esempi relativi all'**anello chiuso** ed al **cedro troncato**.

Teorema 19. *L'anello chiuso è uguale al cilindro che ha per base il cerchio della sezione dell'anello e altezza uguale alla lunghezza della sua circonferenza*.

Teorema 22 (fig. XIV). *La zona di un cedro troncato, delimitata da cerchi uguali su entrambi i lati, è composta dal corpo (volume) di un cedro minore, generato dallo stesso segmento circolare da cui è generata anche la zona considerata, e da un segmento di cilindro, la cui base è il medesimo segmento minore di cerchio e la cui altezza è uguale alla circonferenza del cerchio troncante.*



Archimede (287-212 a.C.)
Sulla sfera e sul cilindro
Conoidi e sferoidi
Misura del cerchio

Johannes Kepler
(1571-1630)
Nova stereometria doliorum vinariorum (1615)

Bonaventura Cavalieri
(1598-1647)
Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (1635)

Introduzione alla 2° parte

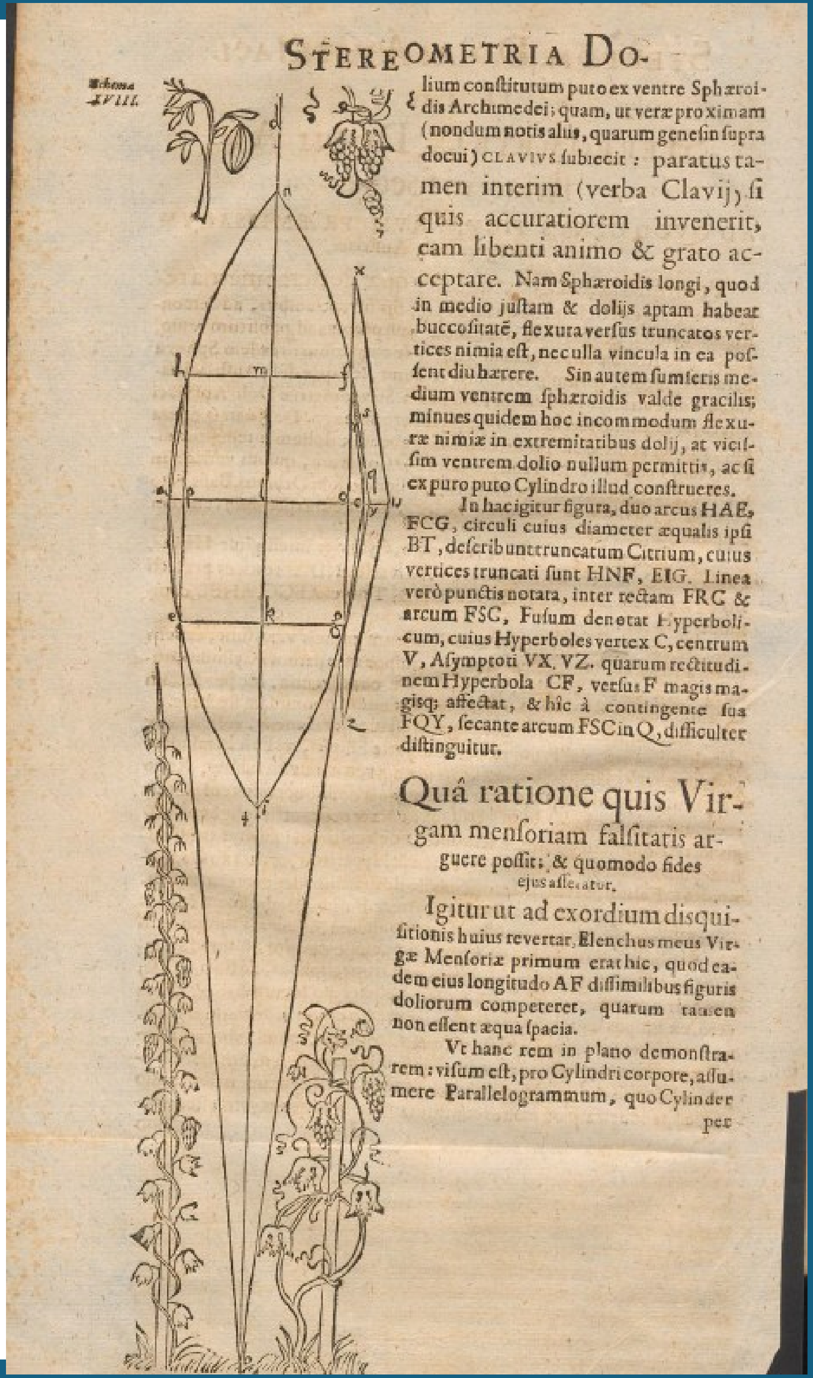
Vengo ora al mio proposito e introduco varie cose, minimamente toccate da Archimede, sotto il titolo di Geometria solida della botte austriaca e le aggiungo al Supplemento ad Archimede trattato in precedenza. Queste cose riguardano corpi parallelepipedi inscritti nella stessa sfera e i loro cilindri e coni, ma che sembrano riguardare solo la natura della botte austriaca. Infatti ***la forma della botte è un cilindro «bulboso»*** *(«ventricosus»), o per meglio dire,* ***la botte è supposta divisa in due*** *cosiddetti* ***tronchi di cono i cui vertici si estendono in direzioni opposte****. Si intendono come troncature delimitate da cerchi di legno del barile; la base comune, che determina la separazione dei coni, è il cerchio massimo che attraversa la parte più ampia («la pancia») del barile.*

Introduzione alla 2° parte

Nella figura XVIII il cilindro è HEGF, il cono è ABC e un altro uguale a questo è da AC verso ND, i vertici tagliati di fronte ad EBG e un altro uguale da HF verso ND. I frusti [tronchi di cono] AEGC, AHFC hanno la base comune AC.

Dunque quello che è vero per cilindri e frusti [tronchi] *di cono può essere applicato anche alla forma di* ***una botte*** *perché essa* ***differisce di poco da un cilindro e ancora meno da un frusto di cono quando le doghe sono unite insieme****, qui supposte essere la linea retta CRF e questa linea è alquanto rigonfia verso l'esterno.*

Più precisamente la forma di ogni botte è nel mezzo un tronco, o di un cedro dovuto al segmento di un cerchio, o di una prugna dovuta alla parte verticale di un'ellisse o di un fuso parabolico, ma soprattutto iperbolico dopo che i vertici sono stati tagliati frontalmente su entrambi i lati.



STEREOMETRIA DO-

Schema XVIII.

lium constitutum puto ex ventre Sphæroidis Archimedei; quam, ut veræ proximam (nondum notis aliis, quarum genesin supra docui) CLAVIVS subiecit: paratus tamen interim (verba Clavij) si quis accuratiorem invenerit, eam libenti animo & grato acceptare. Nam Sphæroidis longi, quod in medio justam & dolijs aptam habeat buccositatē, flexura versus truncatos vertices nimia est, nec ulla vincula in ea possent diu hærere. Sin autem sumseris medium ventrem sphæroidis valde gracilis; minues quidem hoc incommodum flexuræ nimiæ in extremitatibus dolij, at vicissim ventrem dolio nullum permittis, ac si ex puro puto Cylindro illud construeres.

In hac igitur figura, duo arcus HAE, FCG, circuli cuius diameter æqualis ipsi BT, describunt truncatum Citrium, cuius vertices truncati sunt HNF, EIG. Linea verò punctis notata, inter rectam FRC & arcum FSC, Fusum denotat Hyperbolicum, cuius Hyperboles vertex C, centrum V, Asymptoti VX, VZ. quarum rectitudinem Hyperbola CF, versus F magis magisq; affectat, & hic à contingente sua FQY, secante arcum FSC in Q, difficulter distinguitur.

Quâ ratione quis Virgam mensoriam falsitatis arguere possit: & quomodo fides ejus asseratur.

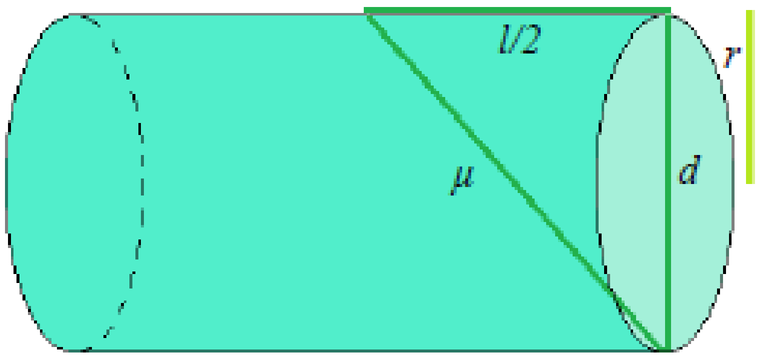
Igitur ut ad exordium disquisitionis huius revertar, Elenchus meus Virgæ Mensoriæ primum erat hic, quod eadem eius longitudo AF dissimilibus figuris doliorum competeret, quarum tamen non essent æqua spacia.

Vt hanc rem in plano demonstrarem: visum est, pro Cylindri corpore, assumere Parallelogrammum, quo Cylinder

per

Kepler considera il volume del cilindro nelle variabili r, l.

Problema: **esprimere** tale **volume in funzione di $\boldsymbol{\mu}$**, la lunghezza misurata dal venditore con l'asta graduata.



$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2 = \mu^2$$

Posto $s = \frac{l}{d}$ e scritto il volume del cilindro in funzione di s, μ, si trova

$$d = \frac{2\mu}{\sqrt{s^2+4}}$$

$$\boldsymbol{V = 2\pi s\mu^3\left(s^2+4\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

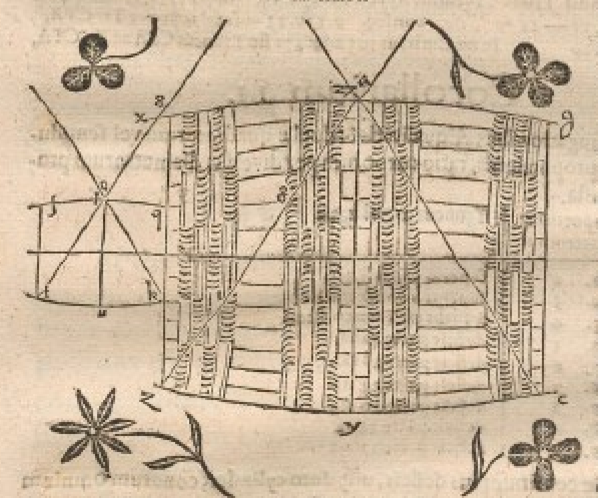
Kepler osservò che la massima capienza si ha per $s = \sqrt{2}$

Kepler sviluppò un metodo per calcolare il volume di solidi di rivoluzione. Sorprendentemente verificò che la forma della botte è quella che permette di contenere la maggior quantità di vino.

Teorema XXVI. *Nei recipienti di forma simile il rapporto delle capacità è il rapporto cubico delle lunghezze che vanno dall'apertura superiore al margine più basso di uno dei fondi di legno.*

Siano SQKT, XGCZ due recipienti di diversa grandezza dello stesso tipo le cui aperture sono O, A, i cui diametri dei fondi di legno sono QK, ST e GC, XZ e i cui punti più bassi sono T, K, Z, C. Le lunghezze OK, OT sono uguali e anche AC, AZ. Affermo che ***il rapporto dei volumi dei due recipienti è il rapporto cubico delle lunghezze OK, AC****. Disegniamo i piani OV, AY per O, A, paralleli al fondo di legno e siano SV, VQ due tronchi di cono simili tra loro, lo stesso vale per XY, YG. Dunque ciò che vale per il rapporto di metà dei recipienti vale anche per le metà raddoppiate.*

Siano OVKQ, AYCG tronchi di cono e siano i lati delle figure OQ, VK e AG, YC. I diametri delle basi minori sono QK, GC, i diametri delle basi maggiori sono OV, AY e OQKV e AGCY sono sezioni quadrilatere delle figure attraverso i loro assi, simili tra loro, e le loro diagonali OK, AC.



De virga cubicâ eiusq; certitudine.

THEOREMA XXVI.

In dolijs, quæ sunt inter se figuræ similis; proportio capacitatum est tripla ad proportionem illarum longitudinum, quæ sunt ab orificio summo, ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

Sint dolia diversæ magnitudinis, specie eadem SQKT, XGCZ, quorum orificia OA, diametri orbium lignorum QK, ST & GC, XZ, eorumq; ima T, K & Z, C, longitudines OK, OT æquales, sic & AC, AZ. Dico, capacitates doliorũ, esse in tripla proportione longitudinis OK, AC. Agantur enim per O, A, plana OV, AY, parallela orbibus ligneis, & sint duo trunci Conici, SV & VQ, sic XY, & YG inter se similes. Quæ igitur de proportione dimidiorum doliorum sunt vera, illa etiam de duplicatis erunt vera. Sint igitur propositæ figuræ OVKQ, AYCG, conici trunci, sintq; latera figurarum OQ, VK, & AG, YC. Diametri Basium minorum QK, GC, diametri basium maiorum OV, AY; & OQKV, AGCY sectiones quadrilateræ figurarum per suos axes, similes inter se, earumq; diagonij OK, AC.

Ergò cum figuræ similes, sint ad seinvicem in tripla proportione analogorum laterum, erit proportionis AG lateris ad OQ latus, aut GC diametri, ad QK diametrum tripla, proportio GY corporis ad QV corpus. At in figuris planis trilateris AGC & OQK similibus, ut GC ad analogum QK, vel ut AG ad analogum OQ, sic etiam diagonios AC ad analogon diago.

Bibliografia essenziale

- Caspar M., *Kepler*. Translated and edited by C. Doris Hellman, New York, Collier Books, 1962.
- Frajese A. (a cura di), *Opere di Archimede*, Torino, UTET, 1974.
- Kepler J./Knobloch E. (Ed. and Trad.), *New solid geometry of wine barrels: a supplement to the Archimedean solid geometry has been added*, Paris, Les Belles Lettres, 2018..
- Kepler J., *Nova stereometria doliorumvinariorum, in primis Austriaci, figurae omnium aptissimae; et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus & plane singularis*, Lincii, Joannes Planchus, 1615. (disponibile da https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/3298821)
- Lombardi A.M., *Keplero. Una biografia scientifica*, Torino, Codice edizioni , 2008.
- Lombardo Radice L. (a cura di), *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*, Torino, UTET, 1966.