# Riflessioni storico-didattiche sulla matematica dei fiocchi di neve di Kepler

**ELENA SCALAMBRO**

Dip. di Matematica «G. Peano» e DBMSS – Università di Torino

elena.scalambro@unito.it

# Kepler e i fiocchi di neve

La curiosità di **Kepler** è colpita dalla forma dei **fiocchi di neve**. Scrive a tal proposito:

*Dato che succede sempre, quando comincia a nevicare, che le prime particelle di neve assumono sempre la forma di* ***piccole stelle a sei punte****, ci deve essere una causa particolare; perché, se ciò accadesse per caso, perché mai dovrebbero cadere con sei punte e non con cinque, o sette?* […] *Le nevi, alla loro prima caduta, prima di aggrovigliarsi in fiocchi più grossi, sono sempre esagonali, e hanno, ogni volta, sei raggi vellutati come piume.*

Kepler prova a svelare il mistero della **simmetria esagonale dei fiocchi di neve** costruendo una sorta di **«modello».**

Kepler può essere considerato come un **antesignano della modellistica matematica** in quanto, nel caso dei fiocchi di neve, ragiona **«come se»** essi fossero composti da particelle elementari e cerca di ottenere tale simmetria esagonale come diretta conseguenza.

# Strena seu de nive sexangula

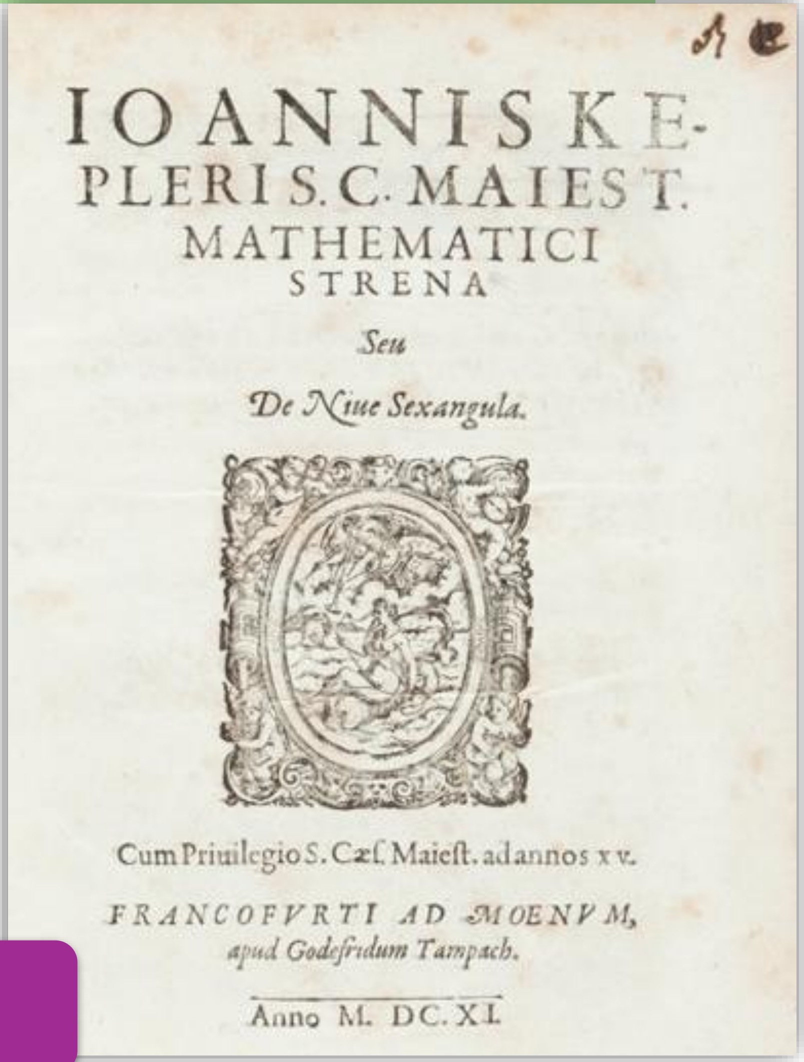
**1611:** pubblicazione di un breve trattato sulla forma dei fiocchi di neve, intitolato ***Strena seu de nive sexangula*** (cioè *Strenna, ossia della neve esagonale*), dedicato al suo amico mecenate M. Wacker von Wackenfels.

*AD ILLUSTREM*
*SACRAE CAESAREAE MAIESTATIS CONSILIARIUM IMPERIALEM AULICUM, DOMINUM IOANNEM MATTHAEUM WACKHERIUM[1] a Wackhenfels, Equitem Auratum, &c. Literatorum & Philosophorum Maecenatem Dominum meum beneficum.*

*Cum non sim nescius, quam tu ames Nihil,[1] non quidem ob pretii vilitatem, sed propter lascivi passeris lusum argutissimum simul et venustissimum: facile mihi est coniicere, tanto tibi gratius et acceptius fore munus, quanto id Nihilo vicinius.*

*Quicquid id est quod aliqua Nihili cogitatione tibi allubescat; id et parum et parvum et vilissimum, et minime durabile, hoc est, paene nihil esse oportet. Qualia cum in rerum natura multa sint, est tamen inter ea delectus. Cogitabis fortasse de uno ex atomis Epicuri: verum id Nihil est. Nihil vero a me habes antea.[2] Eamus itaque per elementa, hoc est per ea, quae sunt in unaquaque re minima.*

*All'Illustr.mo Signor Consigliere aulico di sua Maestà l'Imperatore Johannes Matthäus Wacker von Wackenfels Cavaliere del Vello d'Oro e titolare di molte altre distinzioni, mecenate della gente di lettere e dei filosofi, mio protettore e benefattore.*


IOANNIS KEPLERI S.C. MAIEST. MATHEMATICI
STRENA
Seu
De Niue Sexangula.
Cum Priuilegio S. Cæs. Maiest. ad annos xv.
FRANCOFVRTI AD MOENVM,
apud Godefridum Tampach.
Anno M. DC. XI.

**Attività 3**

# Kepler e i fiocchi di neve

Sembra che l'opera nasca da un'idea avuta da Kepler alla vigilia di **Capodanno** del 1609 quando, recandosi da von Wackenfels, Kepler si accorge di non avere con sé alcun dono (il «Niente»).

Ma, mentre cammina sul **Ponte Carlo** di Praga, inizia a nevicare e gli viene un'idea…

Giocando sul fatto che la parola latina per «neve» (*nix*) è molto simile a quella tedesca per «niente» (*nicht*), Keplero decide circa il suo **dono** (o «strenna»): saranno le sue **riflessioni sul fiocco di neve e sulla sua forma esagonale, sul «Niente».**

# Scheda di lettura

*Qualunque sia l'oggetto che vi aggradi come evocazione del Niente, bisogna che esso sia di tenue importanza, di piccola misura, di prezzo minimo, e che non sia granché durevole, cioè che sia quasi Niente. Nella natura, queste cose abbondano e una scelta si impone.* ***Forse penserai a uno degli atomi di Epicuro****: ma quello è semplicemente Niente.*
*[…] il regalo di Capodanno ideale per il devoto del Niente, la cosa perfetta da regalare per un matematico, che non ha Niente e non riceve Niente, poiché viene giù dal cielo e sembra una stella. Torniamo al nostro* ***mecenate****, finché dura il regalo di Capodanno, per paura che il calore del mio corpo lo sciolga in un niente.* ***E guarda, che presagio nel nome! Che delizia per Wacker, il devoto del Niente! Chiedi a un tedesco cosa significa Nix, e ti risponderà "niente" (se sa il latino).***

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO DipMat Unione Matematica Italiana Liceo Matematico

**Domande**

1. Secondo Kepler, quali sono le caratteristiche di un oggetto che possa rappresentare il "Niente"? ____________________
2. Kepler fa riferimento a Epicuro e alla sua teoria dell'atomismo: di cosa si tratta? Se non l'hai studiata a scuola, cerca qualche informazione in rete. ____________________

Carlo di Praga, riflettendo su cosa … sto le parole da cui lo deduci. ____________________

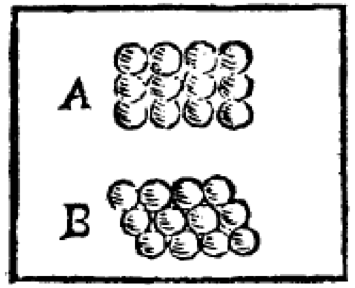
4. Chi è il mecenate cui fa riferimento Kepler quando scrive "Torniamo al nostro mecenate, finché dura il regalo di Capodanno…"? Cosa significa il termine "mecenate" e da dove deriva? Puoi cercare queste informazioni su un dizionario o in rete. ____________________
5. Come si scrive il termine "niente" in tedesco? Cercalo su un dizionario. ____________________
6. Dopo aver provato a far pronunciare da *Google Translate* (o simili) i due termini (neve in latino e niente in tedesco), spiega qual è il gioco di parole che utilizza Kepler quando scrive "E guarda, che presagio nel nome! Che delizia per Wacker, il devoto del Niente! Chiedi a un tedesco cosa significa Nix, e ti risponderà "niente" (se sa il latino)". ____________________
7. Qual è la forma geometrica su cui Kepler si sofferma alla fine del brano e che, come nota, caratterizza i fiocchi di neve? ____________________
troviamo in altre "strutture naturali"? Se sì, quali? ____________________

Collegamenti con la filosofia: Epicuro e l'atomismo

Riflessioni linguistiche sui termini (mecenate, nicht, nix)

Nam si errantes in eodem plano horizontali globulos aequales coegeris in angustum, ut se mutuo contingant; aut triangulari forma coeunt, aut quadrangulari; ibi sex unum circumstant, hic quattuor: utrimque eadem est ratio contactus per omnes globulos, demptis extremis. Quinquanguli forma nequit retineri aequalitas, sexangulum resolvitur in triangula: ut ita dicti duo ordines soli sint.

Iam si ad structuram solidorum quam potest fieri arctissimam progrediaris, ordinesque ordinibus superponas, in plano prius coaptatos, aut ii erunt quadrati A aut trigonici B: si quadrati aut singuli globi ordinis superioris singulis superstabunt ordinis inferioris aut contra singuli ordinis superioris sedebunt inter quaternos ordinis inferioris. Priori modo tangitur quilibet globus a quattuor circumstantibus in eodem plano, ab uno supra se, et ab uno infra se: et sic in universum a sex aliis, eritque ordo cubicus, et compressione facta fient cubi: sed non erit arctissima coaptatio. Posteriori modo praeterquam quod quilibet globus a quattuor circumstantibus in eodem plano tangitur etiam a quattuor infra se, et a quattuor supra se, et sic in universum a duodecim tangetur; fientque compressione ex globosis rhombica. Ordo hic magis assimilabitur octahedro et pyramidi. Coaptatio fiet arctissima, ut nullo praeterea ordine plures globuli in idem vas compingi queant. Rursum si ordines in plano structi fuerint trigonici; tunc in coaptatione solida aut singuli globi ordinis superioris superstant singulis inferioris, coaptatione rursum laxa, aut singuli superioris sedent inter ternos inferioris. Priori modo tangitur quilibet globus a sex circumstantibus in eodem plano, ab uno supra, et infra se, et sic in universum ab octo aliis. Ordo assim prismati, et compressione facta fient pro globulis columnae




# Kepler pioniere del *close packing*

Secondo Kepler, le gocce d'acqua (sferiche) si «impacchettano» il più strettamente possibile, dando origine a **configurazioni esagonali.**

Disposizione ottimale per agglomerare il **maggior numero di entità** sferiche uguali **in uno spazio limitato,** come accade per la disposizione della frutta in una cassetta.

Kepler anticipa la teoria del ***close packing:***

*In generale, infatti, palline uguali, raccolte in un qualsiasi recipiente, si dispongono reciprocamente in due modi, a seconda dei due modi di disporle in un piano.*

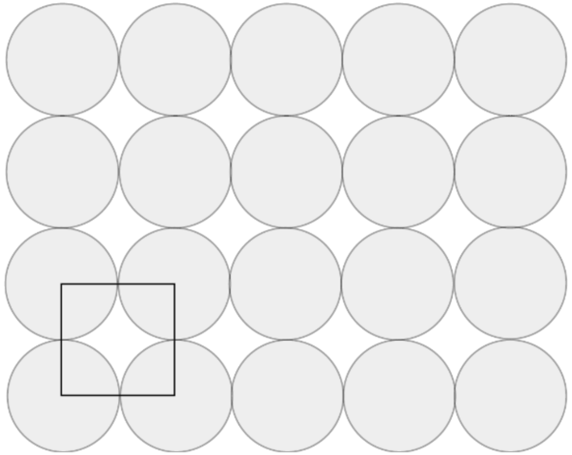
**Attività 4**

# Kepler pioniere del *close packing*

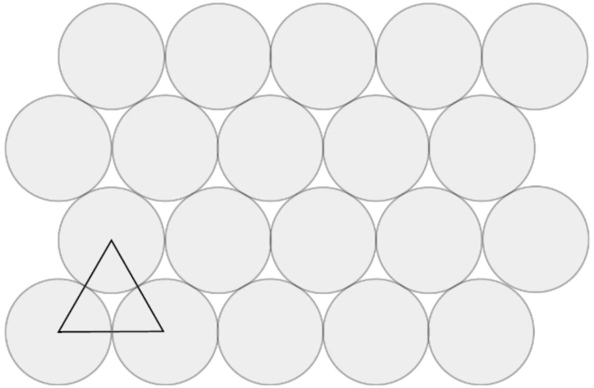
## Cosa accade nel piano?

*Se palline uguali sono libere nello stesso piano orizzontale e le si spinge insieme così strettamente che si toccano, esse si disporranno o secondo una* ***disposizione triangolare*** *o in una* ***quadrangolare****. Nel primo caso sei palline ne circondano una; nel secondo quattro. In ogni caso c'è lo stesso numero di contatti tra tutte le palline, eccetto che per quelle più esterne. Con una disposizione a cinque lati, non si può mantenere l'uniformità. Una disposizione a sei lati si trasforma in una a tre lati. Dunque, vi sono solo le due configurazioni descritte.*

$$\rho_n = \frac{\text{volume occupato dalle porzioni sferiche}}{\text{volume totale}}$$



(a)



(b)

# Alla ricerca della 'migliore' configurazione

**Scheda di lavoro**

- Caso bidimensionale: la configurazione **(a)** è meno densa della **(b)**.

(a) $\rho_2 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854\ldots$

(b) $\rho_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}9069\ldots$

- Riflessione sulla **dimostrazione**:
  A. Thue (1890) ha dimostrato che ogni altro impacchettamento periodico bidimensionale è meno denso di **(b)**

$$\rho_2 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO DipMat Unione Matematica Italiana Liceo Matematico

Guardando l'immagine, quale delle due configurazioni ti sembra "migliore", ossia presenta una densità maggiore? ____________________

Proviamo a calcolare le due densità $\rho_2$ degli impacchettamenti presentati, per verificare la validità della nostra intuizione visiva.

Nel caso **(a)** $\rho_2$ sarà data dal rapporto tra l'________ di 4 settori circolari aventi un l'angolo pari a 90° e l'area di un ___________ avente lato pari al doppio del raggio dei settori. Indichiamo con $r$ tale raggio.

L'area dei quattro settori circolari in figura è pari a quella di un cerchio di raggio $r$, ovvero

$$A_{cerchio} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Il quadrato ha lato pari a $2r$, per cui la sua area sarà

$$A_{quadrato} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Possiamo quindi ricavare $\rho_2$, facendo il rapporto tra le due aree appena trovate.

$$\rho_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \approx 0{,}785398\ldots.$$

Procediamo in maniera analoga nel caso **(b)**. La densità $\rho_2$ sarà data dal rapporto tra l'________ di 3 settori circolari aventi un l'angolo pari a 60° e l'area di un ______________ di lato pari al doppio del raggio dei settori. Indicando nuovamente con $r$ tale raggio, l'area dei tre settori circolari in figura è pari a quella di un semicerchio di raggio $r$ (perché 60°x3=______°), ovvero

$$A_{semicerchio} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Il triangolo equilatero ha lato pari a $2r$. La sua altezza, allora, è pari a

$$h = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \_\_\_\_ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \_\_\_\_\_\_$$

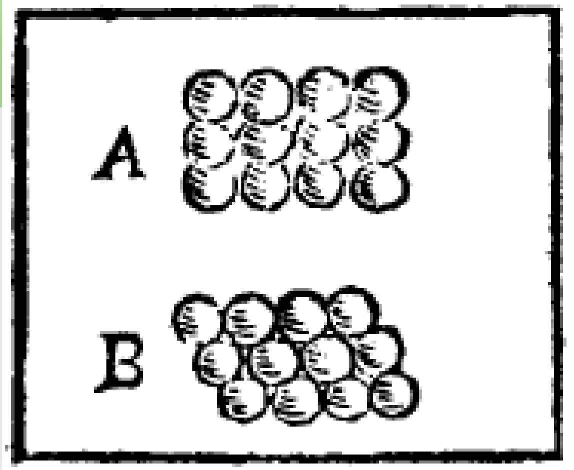
Di conseguenza, l'area del triangolo vale

$$A_{triangolo} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Possiamo quindi ricavare $\rho_2$, facendo il rapporto tra le due aree appena trovate.

$$\rho_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \approx 0{,}9069\ldots.$$

# La congettura di Kepler




## Cosa accade nello spazio?

*Ora, se si procede a impacchettare i corpi solidi nel modo più stretto possibile e si dispongono quelli disposti per primi su un livello sopra agli altri, strato su strato, le palline saranno disposte o secondo quadrati (A nel diagramma), o secondo triangoli (B nel diagramma).*

Qui compare la celebre **congettura di Keplero:**

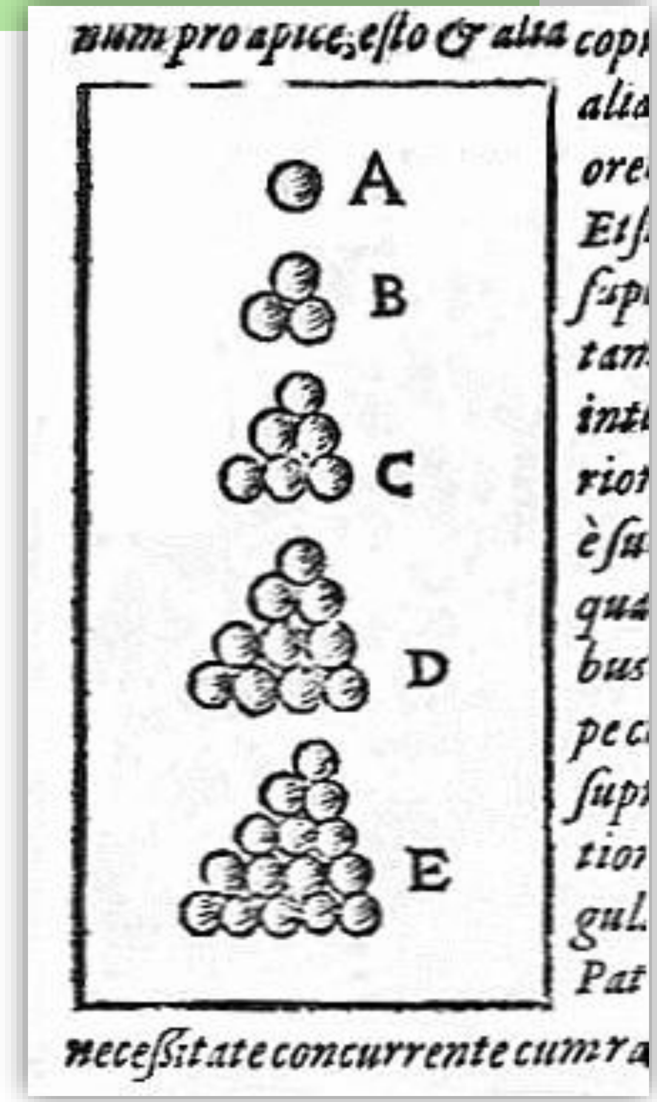
*[…] non solo ogni pallina è toccata dalle sue quattro vicine dello stesso strato, ma anche da quattro dello strato superiore e da quattro di quello inferiore, e così in tutto uno sarà toccata da dodici, e sotto pressione le palline sferiche diventeranno romboidali. Questa disposizione sarà più simile all'ottaedro e alla piramide.* ***L'impacchettamento sarà il più stretto possibile****, così che non potrebbero essere inserite palline ulteriori nello stesso contenitore.*

→ Se si comprime una disposizione di piccole sfere in una regione dello spazio, ciascuna **sfera compressa** si trasformerà in un **poliedro rombico** (cfr. interno del melograno).

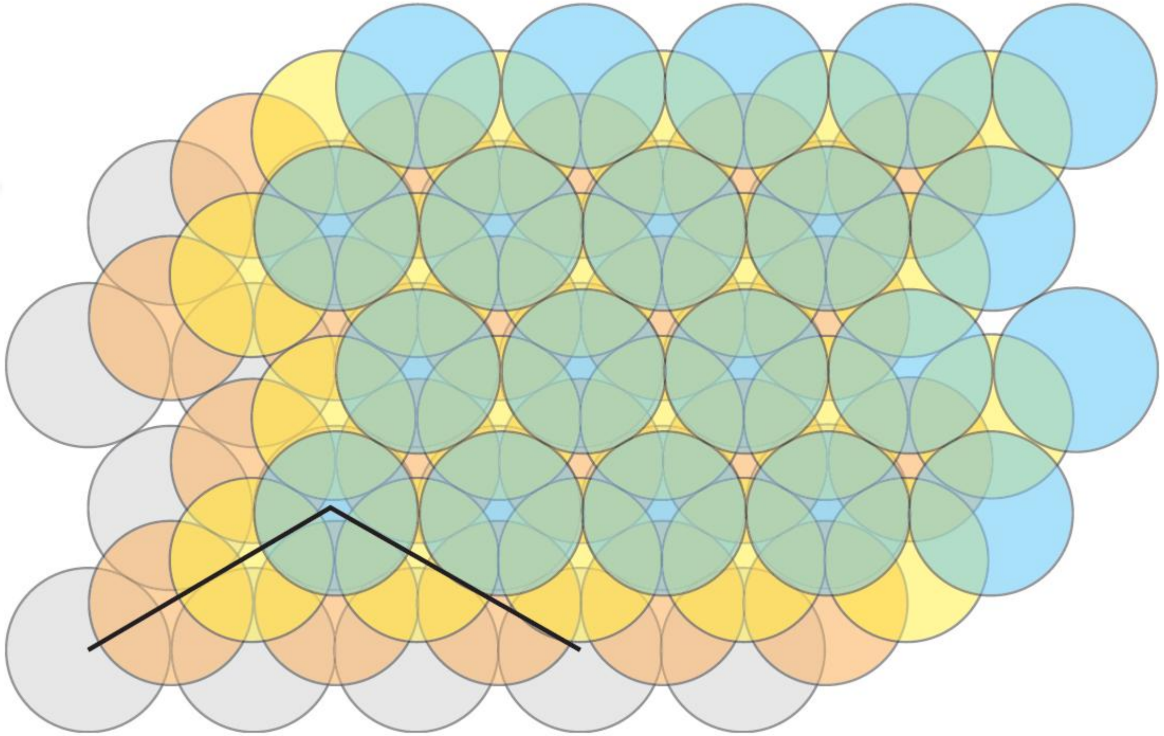
# La congettura di Keplero

*Nel secondo caso si otterrà lo stesso risultato di prima nella seconda modalità della disposizione quadrata, quindi: sia B un gruppo di tre palline; su di esso sia posta una, A, come vertice; supponiamo anche un altro gruppo, C, di sei palline; un altro, D, di dieci; e un altro, E, di quindici. Si sovrapponga regolarmente lo strato più stretto a quello più largo per ottenere la forma di una piramide. Ora, sebbene in questa costruzione ogni pallina di uno strato superiore sia posta tra tre di quelle inferiori,* **se si gira la figura in modo che non sia il vertice ma un intero lato della piramide ad essere in alto,** *si troveranno, ogni volta che si toglie una pallina dalla cima, quattro che giacciono sotto di essa in una disposizione quadrata. Di nuovo, come prima,* **una pallina sarà toccata da altre dodici***, cioè da sei vicine sullo stesso piano, da tre sopra e da tre sotto. Così,* **nell'impacchettamento più compatto in tre dimensioni, la disposizione triangolare non può esistere senza quella quadrata, e viceversa.**

*È quindi ovvio che i loculi del melograno sono compressi nella forma di un solido romboidale: le esigenze della loro materia coincidono con le proporzioni della loro crescita.*



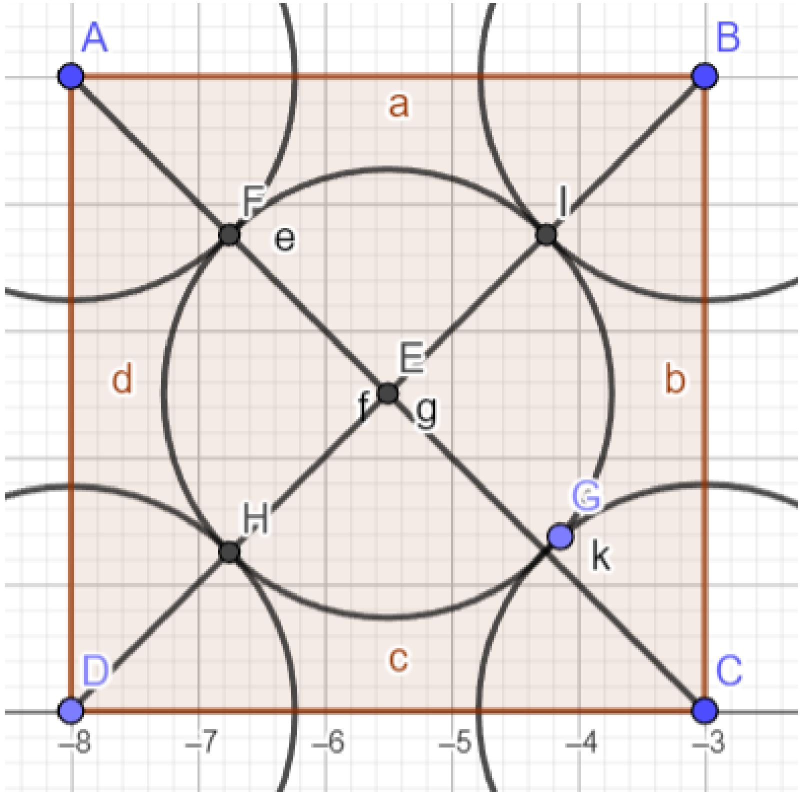
# La congettura di Keplero



Per ritrovare la configurazione triangolare **(b)** occorre considerare il piano inclinato passante per i centri delle sfere che costituiscono una faccia laterale della piramide [cfr. Klein Project Blog].

# La congettura di Keplero

Questo tipo di impacchettamento è detto **reticolo cubico a facce centrate**: si tratta della **disposizione delle sfere** che garantisce un'**occupazione ottimale dello spazio** (configurazione nella quale i centri delle sfere sono posizionati ai vertici di un cubo di spigolo $a$).




**Passo 1.** Dimostrare che $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

**Passo 2.** Calcolare $\rho_3 = \frac{V_{porzioni\,sferiche}}{V_{cubo}}$

$$= \frac{\left(2\sqrt{2}r\right)^3}{4\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)} = \frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{16\sqrt{2}r^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}7405\ldots$$

# La difficoltà del problema

La congettura di Keplero dovrà attendere più di tre secoli e mezzo per essere dimostrata rigorosamente…

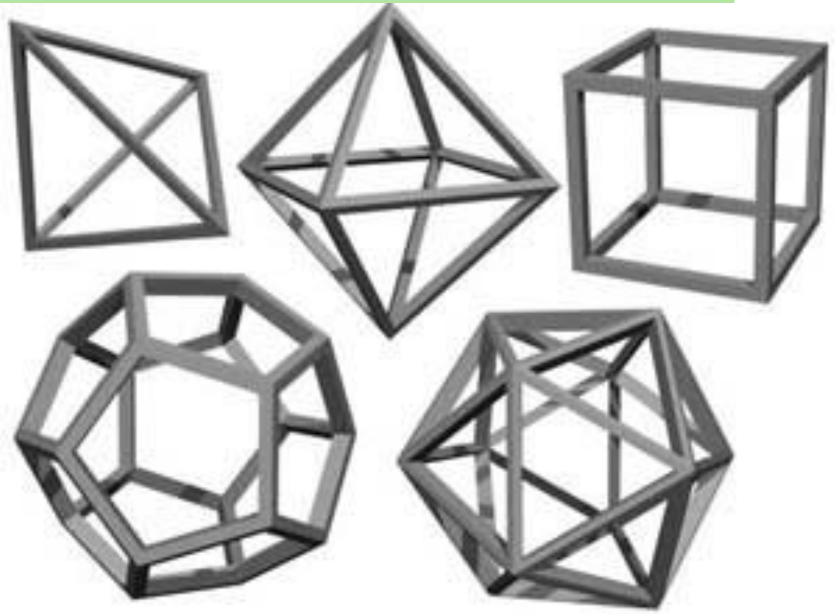
- 1900: D. **Hilbert** la presentata come **XVIII problema.**
- **1998:** risoluzione da parte di Thomas **Hales**
- 2005: pubblicazione della dimostrazione sugli *Annals of Mathematics* (computer-assisted proof)
- …ad oggi: alla ricerca di una dimostrazione formale (cfr. progetto Flyspeck)

Per «circondare» una sfera con sfere tangenti della medesima dimensione si possono posizionare al massimo 12 sfere, ma… c'è ancora spazio attorno alla sfera di partenza!
Tuttavia:

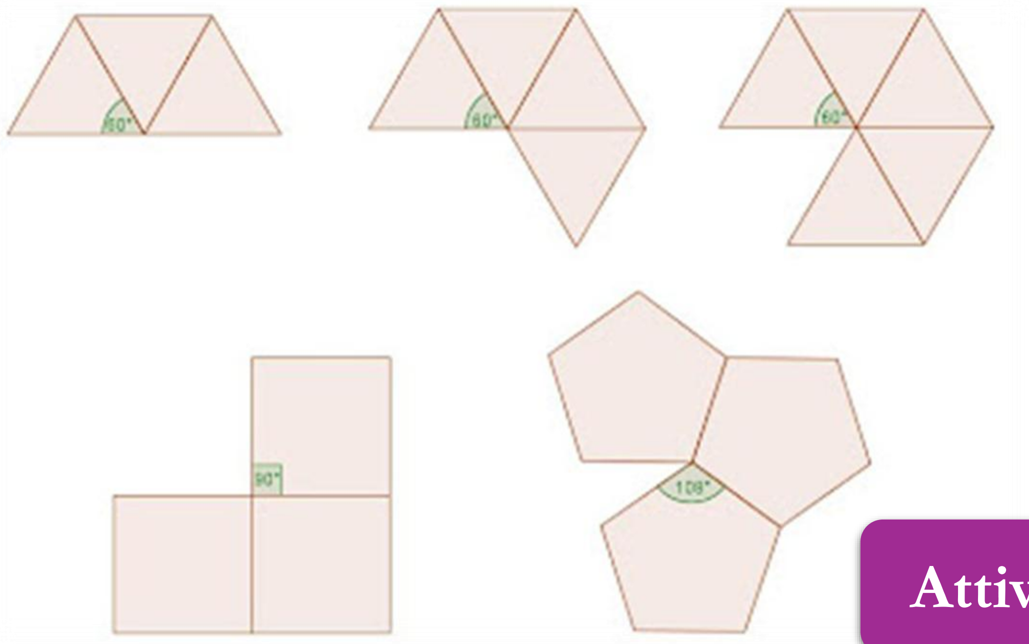
- Non è possibile collocare una tredicesima sfera
- Esistono modi diversi e non equivalenti di posizionare le 12 sfere tangenti

# Le «cinque cause» della forma esagonale

*Poi, perché a sei punte? È perché* ***è la prima delle figure regolari a essere essenzialmente piatta****, cioè* ***incapace di combinarsi con se stessa per formare un corpo solido****? Nel caso di triangolo, quadrato, pentagono, tutti formano corpi.*



→ **Non esiste un poliedro regolare** avente come **facce** degli **esagoni regolari** congruenti




**Attività 5**

**Prima causa**

L'esagono ben si adatta al coesistere di aria calda e aria fredda su una superficie piatta di vapore ed è l'unico poligono regolare che non è la faccia di un solido platonico (tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro).

# I solidi platonici

Introduzione del concetto di **angoloide** e dimostrazione della non esistenza di poliedri regolari delimitati da poligoni regolari con un numero di lati ≥ 6.

sono tutti congruenti. Supponiamo che le facce del poliedro regolare siano triangoli equilateri: l'ampiezza dell'angolo di una faccia è di _____°. Allora:

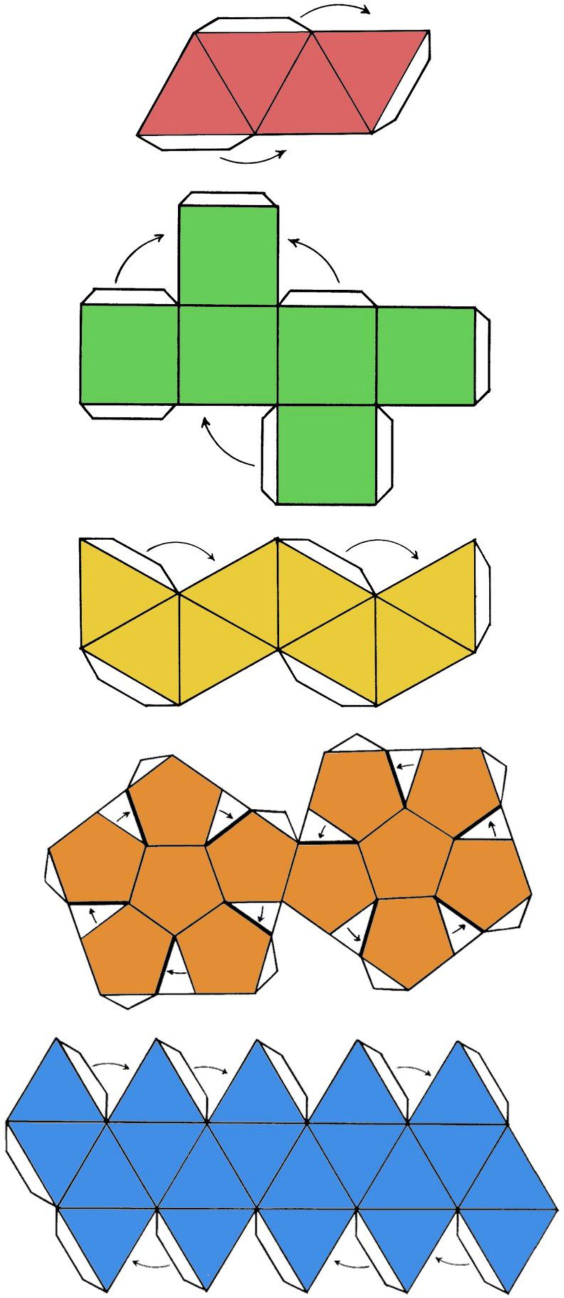
- con tre facce per vertice (3 x _____° = _____°) si ottiene un tetraedro,
- con quattro facce per vertice (4 x _____° = _____°) si ottiene un ottaedro,
- con cinque facce per vertice (3 x _____° = _____°) si ottiene un icosaedro.

Perché, nel caso dei triangoli equilateri, non si possono avere sei facce per vertice? ______________
________________________________________________________________________________
________________________________________________________________________________

Abbiamo così esaurito i poliedri regolari a facce triangolari. Passiamo quindi al caso in cui le facce sono dei quadrati: con tre facce per vertice (3 x _____° = _____°) si ottiene __________________ .
Se avessimo quattro facce quadrate, l'angoloide misurerebbe 4 x _____° = _____°.
Esiste un poliedro regolare siffatto? Perché? ________________________________________
________________________________________________________________________________

Se la faccia è un pentagono regolare, nel caso di tre facce per vertice (3 x 108° = _____°) si ottiene ____________________ . Se avessimo quattro facce pentagonali, invece, l'angoloide misurerebbe 4 x 108° = _____°. È possibile? Perché? ______________________________________________
________________________________________________________________________________

Infine, se la faccia è un esagono regolare, 3 x 120° = _____°. Esiste? ________________________
Quanti sono i poliedri regolari che abbiamo ottenuto? ____________________________

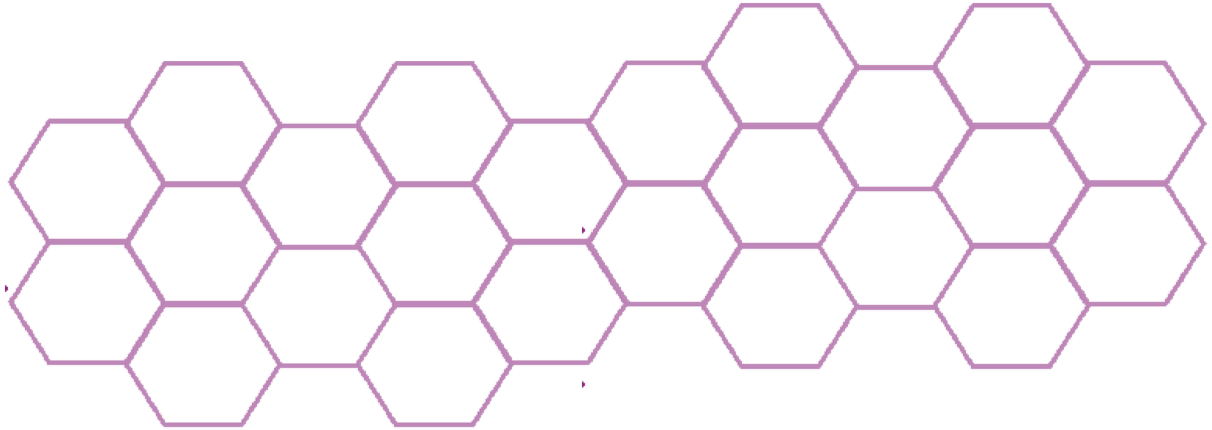


# Le «cinque cause» della forma esagonale

*È perché l'esagono* ***giace su una superficie piana senza lasciare un buco****? O questa è la differenza tra la facoltà di produrre* ***forme sterili****, i triangoli e gli esagoni, e la seconda facoltà che costruisce forme fruttuose, i pentagoni? O, infine, la natura di questa* ***facoltà formatrice*** *prende parte all'essere a sei angoli nel più intimo recesso del suo essere?*

**Seconda e terza causa**

L'esagono costituisce una tassellazione completa del piano ed è la figura dotata di tale proprietà che meglio approssima il cerchio.



**Quarta e quinta causa**

La simmetria esagonale è una caratteristica tipica del mondo inanimato mentre la simmetria pentagonale è propria del mondo vegetale e animale; la forma esagonale è espressione profonda dell'anima creatrice che plasma la natura stessa.

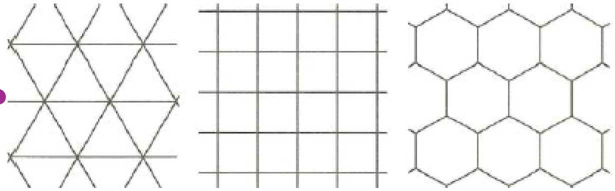
# La tassellazione del piano e le forme naturali

**Approfondimento: la tassellazione del piano**

Kepler aggiunge poi che l'esagono "giace su una superficie piana senza lasciare un buco".
La proprietà di "giacere sul piano senza lasciare un buco" corrisponde, in matematica, a "tassellare".
Una **tassellazione piana regolare** è infatti un ricoprimento del piano ottenuto con figure congruenti, ripetute all'infinito, senza sovrapposizioni. Questo concetto corrisponde all'idea intuitiva di pavimentazione con piastrelle identiche tra loro, cioè ricoprimento di una superficie attraverso figure piane congruenti che né lascino "vuoti" né abbiano sovrapposizioni.

1. Utilizzando le figure piane di cartoncino a disposizione, prova a costruire una pavimentazione con tutti i triangoli equilateri, una con i quadrati, una con gli esagoni e una con i pentagoni. In quali casi si riesce a fare e in quali no?____________________________________________
_____________________________________________________________________
2. Proviamo a capire come mai alcuni poligoni regolari tassellano il piano e altri no, osservando le pavimentazioni appena costruite. Intorno a un vertice tutti gli angoli devono essere tra loro _____________ e la loro somma deve essere pari ad un angolo giro, ovvero a _______°.
Qual è la caratteristica degli angoli interni dei poligoni regolari che tassellano il piano?
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
Infatti:
   - un triangolo equilatero ha gli angoli di _______°, che è un sottomultiplo di 360°. Intorno a ogni vertice della tassellazione triangolare, ci sono ________ triangoli equilateri, poiché 360°:____°=______;
   - allo stesso modo, poiché il quadrato ha gli angoli interni di _______°, che è un divisore di 360°, attorno a ogni vertice della tassellazione quadrata, vi sono _______ quadrati, poiché 360°:____°=______;
   - infine, gli angoli interni dell'esagono regolare misurano ______°, che è ________________ di 360°, per cui intorno a ogni vertice della tassellazione abbiamo ________ esagoni regolari.

   Gli angoli interni del pentagono regolare, invece, misurano 108°. Dividendo 360° per 108° si ottiene _______ quindi ___________________________________________________
_____________________________________________________________________
3. Le uniche tassellazioni piane regolari composte da poligoni regolari sono le tre seguenti.



Motiva questa affermazione, cercando eventualmente le ampiezze degli angoli interni dei poligoni regolari con più di sei lati. ____________________________________________________
_____________________________________________________________________

VS

**Approfondimento: pentagoni ed esagoni in natura**

Quali sono le forme geometriche "sterili" e quelle "fruttuose" secondo Kepler? ________________
_____________________________________________________________________

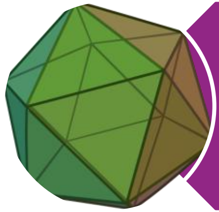
Nel brano della *Strena* analizzato, Kepler fa esplicito riferimento ad un elemento naturale del mondo dei viventi caratterizzato da una particolare forma geometrica. Qual è? ____________________
Sottolinea la frase nel testo.

Cerca ed elenca qui sotto alcuni esempi di esseri viventi (vegetali e animali) in cui si trova la forma geometrica citata da Kepler.

1. ________________________________
2. ________________________________
3. ________________________________
4. ________________________________
5. ________________________________
6. ________________________________
7. ________________________________
8. ________________________________
9. ...

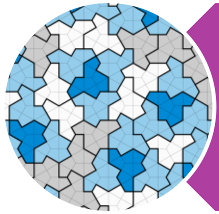
Kepler, tuttavia, non considera che in natura vi sono alcune "forme feconde" – nel suo linguaggio – caratterizzate invece da una geometria esagonale: ad esempio, il giglio (vedi figura a lato) è un fiore a sei petali e non è sterile.
Cerca altri contro-esempi all'affermazione di Kepler, individuando ulteriori esseri viventi a simmetria esagonale.
_____________________________________________________
_____________________________________________________
_____________________________________________________
_____________________________________________________
_____________________________________________________
_____________________________________________________

# Le «cinque cause» della forma esagonale



## Prima causa

- Diversi strati di vapore che agiscono separatamente, in tempi differenti

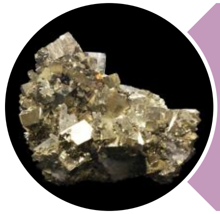


## Seconda e terza causa

- I fiocchi di neve sono di forme e grandezze differenti

## Quarta causa

- Esistono dei casi di simmetria esagonale anche nel mondo vivente (es. giglio)



## Quinta causa

- I cristalli, provenienti dalle miniere, si presentano in un’infinità di forme

# Per concludere

*Recognizing that* ***mathematics*** *as an activity might be described as* ***one long conversation stretching over millennia.***

[Mazur 2013]

- Approccio laboratoriale
- Adeguata contestualizzazione storica
- Lettura e analisi di fonti e testi matematici: sensibilizzare gli studenti nei confronti delle fonti primarie
- Promuovere lo sviluppo delle capacità di riflessione e dello spirito critico degli allievi
- Favorire la progettazione di percorsi interdisciplinari (matematica e fisica, scienze e/o chimica, latino, storia, …)

***Reading original sources directs the attention to processes,*** *which leads to the genesis of concepts.*

[Radford & Furinghetti 2014]

# Riferimenti bibliografici


**Ball, P. (2011).** In retrospect: On the Six-Cornered Snowflake. *Nature*, *480*, 455.

**Bartocci, C. (2004).** Il mondo è matematico?, In: AA.VV. (Ed.), *La matematica della natura* (pp. 17–38). Erga Edizioni.

**Brigaglia, A. (2016).** Tassellazioni, solidi archimedei, poligoni stellati nell'Harmonices Mundi di Keplero, In: Ferrara, F., Giacardi, L., & Mosca, S. (Eds.), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2015-2016* (pp. 91–119). Kim Williams Books.

**Hales, T. (2000).** Cannonballs and honeycombs, *Notices of the American Mathematical Society* 47, 440-449.

**Kepler, J. (1611).** *Strena, seu de nive sexangula.* G. Tampach. (disponibile da https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1001432)

**Kepler, J./ White, L. (Trad.) (1996).** *The six-cornered snowflake.* Claredon Press. (disponibile da http://www.joostwitte.nl/M_Galilei/Johannes_kepler_snowflake.pdf)

**Szpiro, G.C. (2003).** *Kepler's conjecture: How Some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World.* John Wiley & Sons.


Tutti i materiali, i brani proposti e le tracce complete delle attività sono disponibili al link:
https://dmi.unife.it/it/terza-missione/mathesis/liceo-matematico-1/materiali-seminario-nazionale-licei-matematici-2024