Dall'algebra dei segmenti di Cartesio all'algebra dei punti: un percorso storico didattico

Nicol Imperi

Sapienza Università di Roma

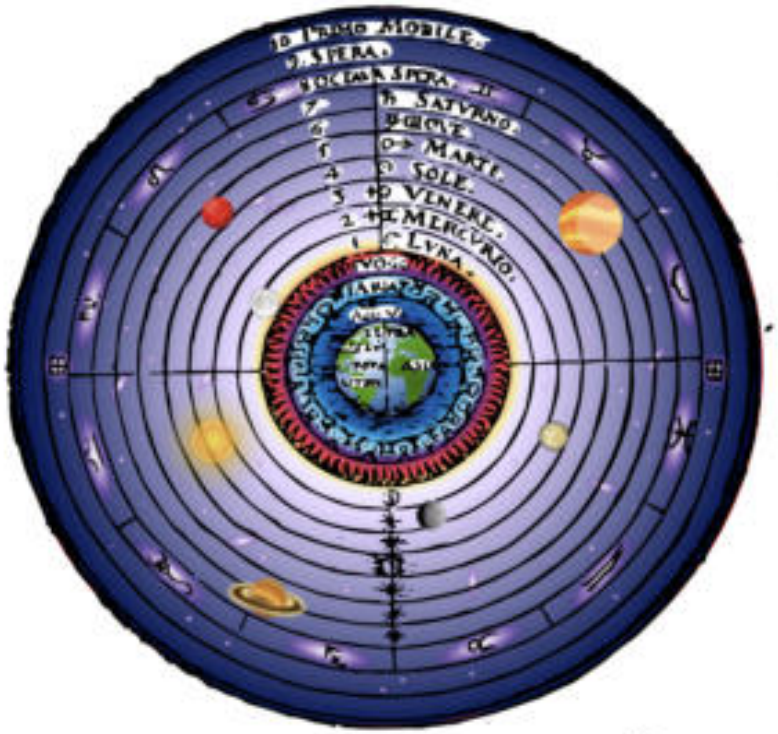
22 dicembre 2025

Introduzione

Variazione e modelli matematici

Antichità

La filosofia naturale considerava solo le **variazioni uniformi** (come la posizione degli astri); le variazioni più generali erano descritte in modo qualitativo.

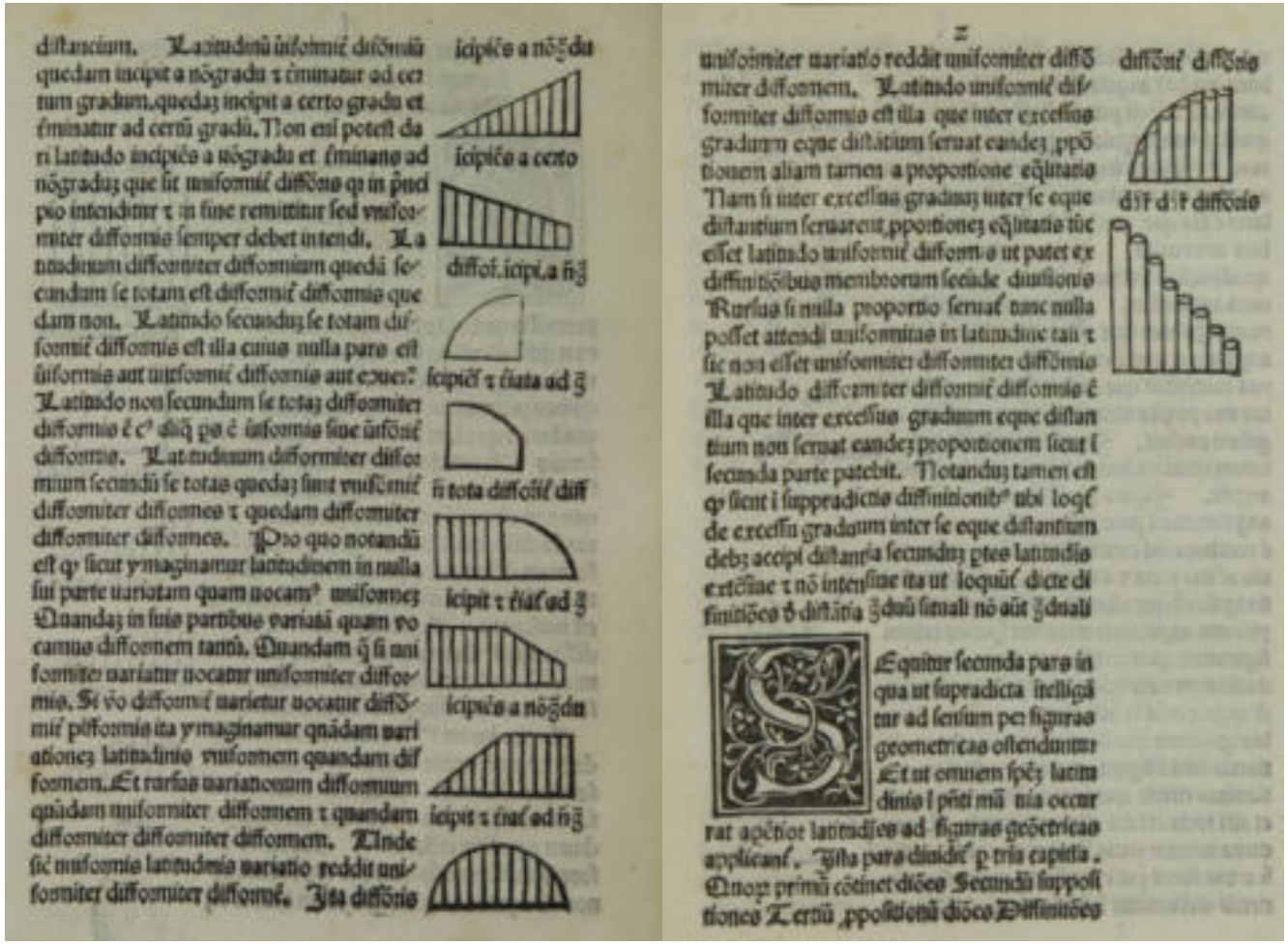


Variazione e modelli matematici

Medioevo

Nelle scuole di **Oxford** e **Parigi**, iniziano ad essere elaborati i primi modelli matematici per descrivere variazioni non uniformi, inizialmente utilizzando strumenti puramente geometrici.

Tractatus de latitudinibus formarum (1482)



distancium. Latitudinū uniformiē diffōmiū
quedam incipit a nōgradu t ēminatur ad cer
tum gradum, quedaz incipit a certo gradu et
ēminatur ad certū gradū. Non ens potest da
ri latitudo incipiēs a nōgradu et ēminans ad
nōgraduz que sit uniformiē diffōnis qz in ꝓnci
pio intenditur t in fine remittitur sed unifor
miter diffornis semper debet intendi. La
titudinum diffomiter diffomium quedā se
cundum se totam est diffornie diffornis que
dam non. Latitudo secunduz se totam dif
fornie diffornis est illa cuius nulla pars est
uniformis aut uniformiē diffornis aut equer.
Latitudo non secundum se totaz diffomiter
diffornis ē cui dictā ꝓs ē uniformis sive uniformiē
diffornis. Latitudinum diffomiter diffor
mium secundū se totas quedaz sunt uniformiē
diffomiter diffomes t quedam diffomiter
diffomiter diffomes. Ꝓro quo notandū
est qz sicut ymaginamur latitudinem in nulla
sui parte uariatam quam uocam uniformez
Quandaz in suis partibus variatā quam vo
camus diffornem tantū. Quandam ꝙ si uni
formiter uariatur uocatur uniformiter diffor
mis. Si vo diffornie uarietur uocatur diffōr
miē piformis ita ymaginamur quādam vari
ationez latitudinis uniformem quandam dif
formem. Et rursus uariationum diffomium
quādam uniformiter diffornem t quandam
diffomiter diffomiter diffornem. Unde
sic uniformis latitudinis uariatio reddit uni
formiter diffomiter diffornie. Ista diffōnis

icipiēs a nōgradu

icipiēs a certo

diffor. icipiens a nō

icipiēt t finiens ad gradū

si tota diffōnis diff

incipit t finit ad gradū

icipiēs a nōgradu

incipit t finit ad nōgradū

z

uniformiter uariatio reddit uniformiter diffō
miter diffornem. Latitudo uniformiē dif
formiter diffornis est illa que inter excessus
graduum eque distātium seruat eandez ꝓpō
tionem aliam tamen a proportione eqlitatis
Tam si inter excessus graduum inter se eque
distantium seruarent, ꝓportionez eqlitatis tūc
esset latitudo uniformiē diffornis ut patet ex
diffinitiōibus membrorum secūde diuisionis
Rursus si nulla proportio seruat nunc nulla
posset attendi uniformitas in latitudine tali t
sic non esset uniformiter diffomiter diffōnis
Latitudo diffomiter diffornie diffornis ē
illa que inter excessus graduum eque distan
tium non seruat eandez proportionem sicut i
secunda parte patebit. Notanduz tamen est
qz sicut i suppradictis diffinitionib⁹ ubi logr
de excessu graduum inter se eque distantium
debz accipi distantia secunduz gtes latitudis
extēsiue t nō intensiue ita ut loquūr dicte di
finitiōes ꝺ distātia ꝺnaū finali nō aūt ꝺnali

Sequitur secunda pars in
qua ut supradicta intelligā
tur ad sensum per figuras
geometricas ostendunt
Et ut omnem spēz latitu
dinis i pūti mā nia occur
rat aptiot latitudines ad figuras geōetricas
applicant. Ista pars dividr p tria capitula.
Quoz primū cōtinet diōes Secundū suppositi
ones Tertiū ꝓpositiōnū diōes Diffinitōes

diffōnis diffōnis

diff diff diffōnis

Il modello cartesiano

Il contributo di **Cartesio**: Il modello più raffinato prima del calcolo differenziale *(La Géométrie, 1637)*.

La rivoluzione del calcolo differenziale

Il rapido successo

Il **calcolo differenziale** cambia radicalmente l'approccio matematico.
Rapidamente assorbe e generalizza il modello geometrico cartesiano.

L'approccio di Cartesio e il concetto di *sintomo*

Riscoperta di Apollonio

La *Géométrie* offre gli strumenti per trattare in maniera più algebrica l'approccio geometrico di **Apollonio** alle coniche, raggiungendo nuovi risultati grazie al simbolismo algebrico di **Viète**.

Il concetto di sintomo

- È la descrizione della **covariazione** di due segmenti vincolati da una costruzione geometrica.
  - per Apollonio: meccanismo che esprime la covariazione
  - per Cartesio: equazione
- Il vincolo geometrico diventa l'oggetto matematico, il *sintomo*, che identifica la curva.

L'algebra dei segmenti: simboli per segmenti variabili

Descrizione

- Un'algebra simbolica dove la covariazione tra segmenti variabili è espressa tramite equazioni.
- Le variabili non sono numeri, ma grandezze geometriche vincolate da costruzioni con riga e compasso.

Aspetti in evidenza

- La modellizzazione della variabilità geometrica attraverso l'uso di segmenti variabili e non di numeri variabili.
- La modellizzazione del processo di costruzione di particolari relazioni tra quantità (geometriche) variabili attraverso costruzioni con riga e compasso.
- L'algebrizzazione delle relazioni, che si accompagna all'uso dei simboli e del calcolo simbolico.

L'**algebra di Cartesio** è in grado di esprimere tramite equazioni il sintomo delle curve che sono grafici di:

- funzioni razionali di x;
- funzioni razionali di $\sqrt{x}$.

Questi grafici sono luoghi di punti **costruibili** con riga e compasso.

Osservazione: L'introduzione di strumenti aggiuntivi (es. compasso e meccanismo di Cartesio) permette di costruire funzioni algebriche più generali.

Compasso e meccanismo di Cartesio

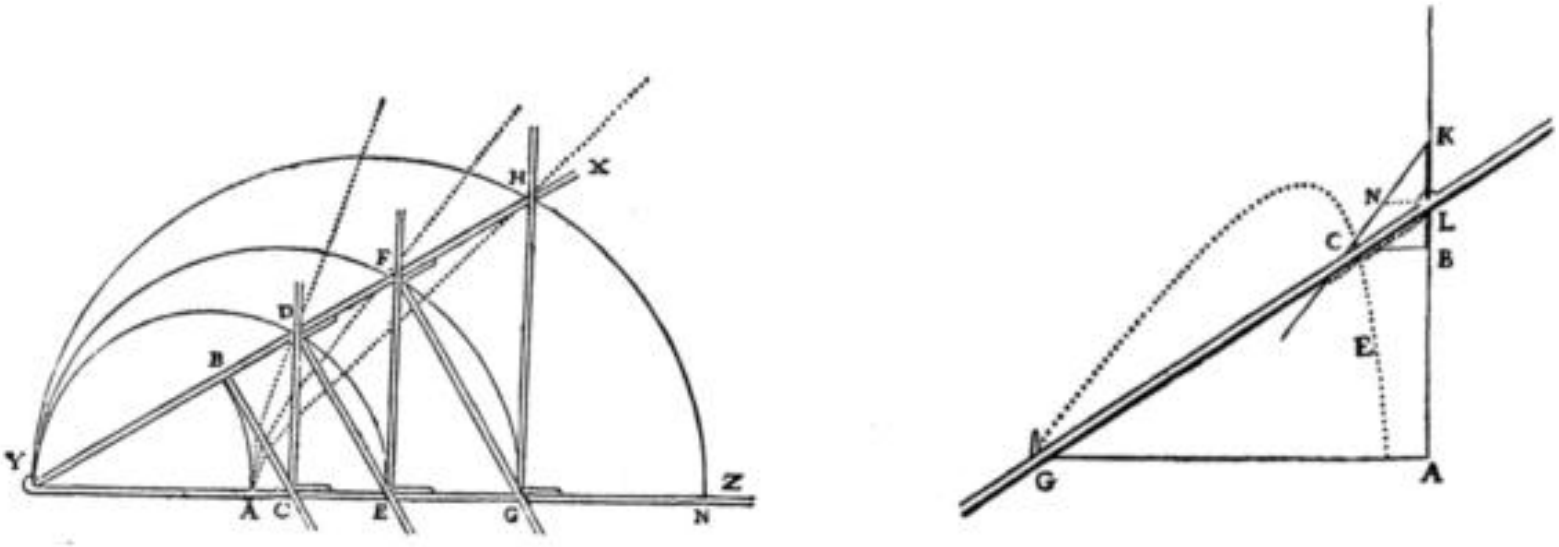


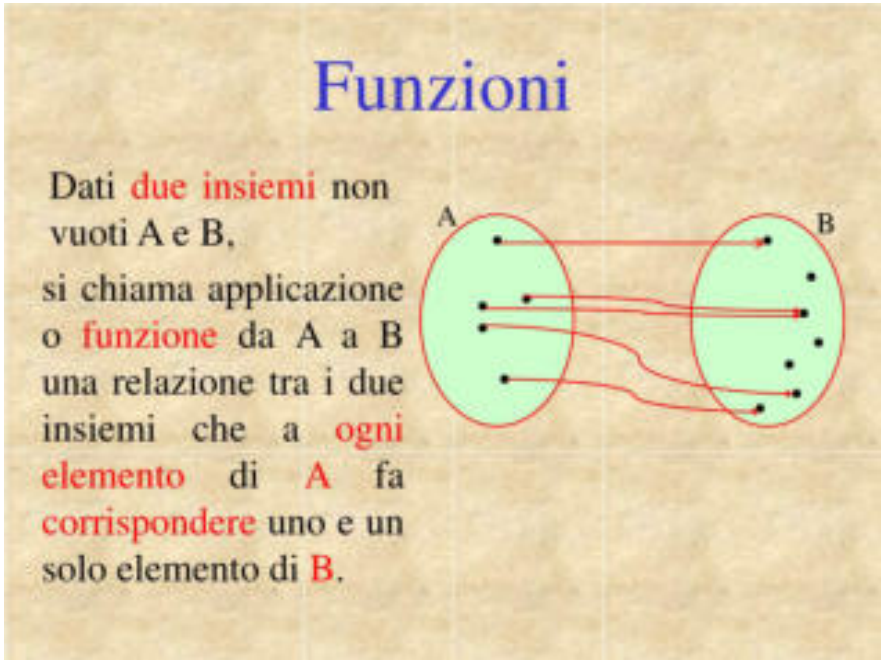
Figura 1. Queste sono le figure con cui Cartesio nella Géométrie illustra gli strumenti per estrarre le radici qualsiasi di un segmento (compasso di Cartesio a sinistra, (Descartes, 1637, p. 318)) e per dividere un angolo in un numero qualsiasi di parti congruenti (meccanismo di Cartesio a destra (Descartes, 1637, p. 320).

La potenzialità didattica dell'approccio cartesiano alla covariazione

Il concetto di funzione: difficoltà didattiche

Introduzione standard

Nelle scuole secondarie, la funzione è generalmente introdotta come funzione reale di variabile reale come caso particolare della definizione insiemistica.



Difficoltà Riconosciute

La ricerca didattica ha ampiamente documentato le difficoltà degli studenti nell'apprendimento del concetto di funzione.
Tali difficoltà rappresentano alcuni degli aspetti più critici dell'intero processo di insegnamento e apprendimento della matematica.

Riferimenti:

- Dubinsky, Harel (1992);
- Sfard (1992);
- Sierpinska (1992);
- Tall, Vinner (1981);
- Vinner (1983).

$\sqrt{x}$: esempio di costruzione geometrica

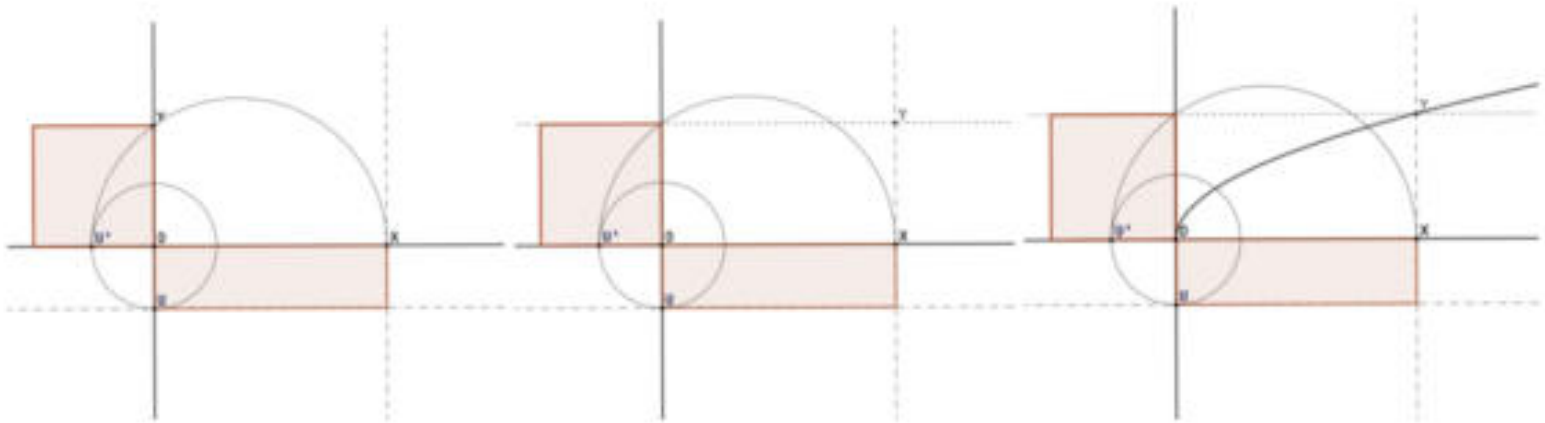


Figura 2. Dato il rettangolo OUX, per costruire il quadrato equivalente, basta prendere come lato il medio proporzionaleOY tra i lati OU e OX del rettangolo (figura a sinistra). Sia XY il segmento parallelo e congruente a OY (figura al centro). Al variare di X il luogo degli estremi Y dei segmenti XY descrive una curva, prodotta da una covariazione geometrica, espressa dalla costruzione indicata.

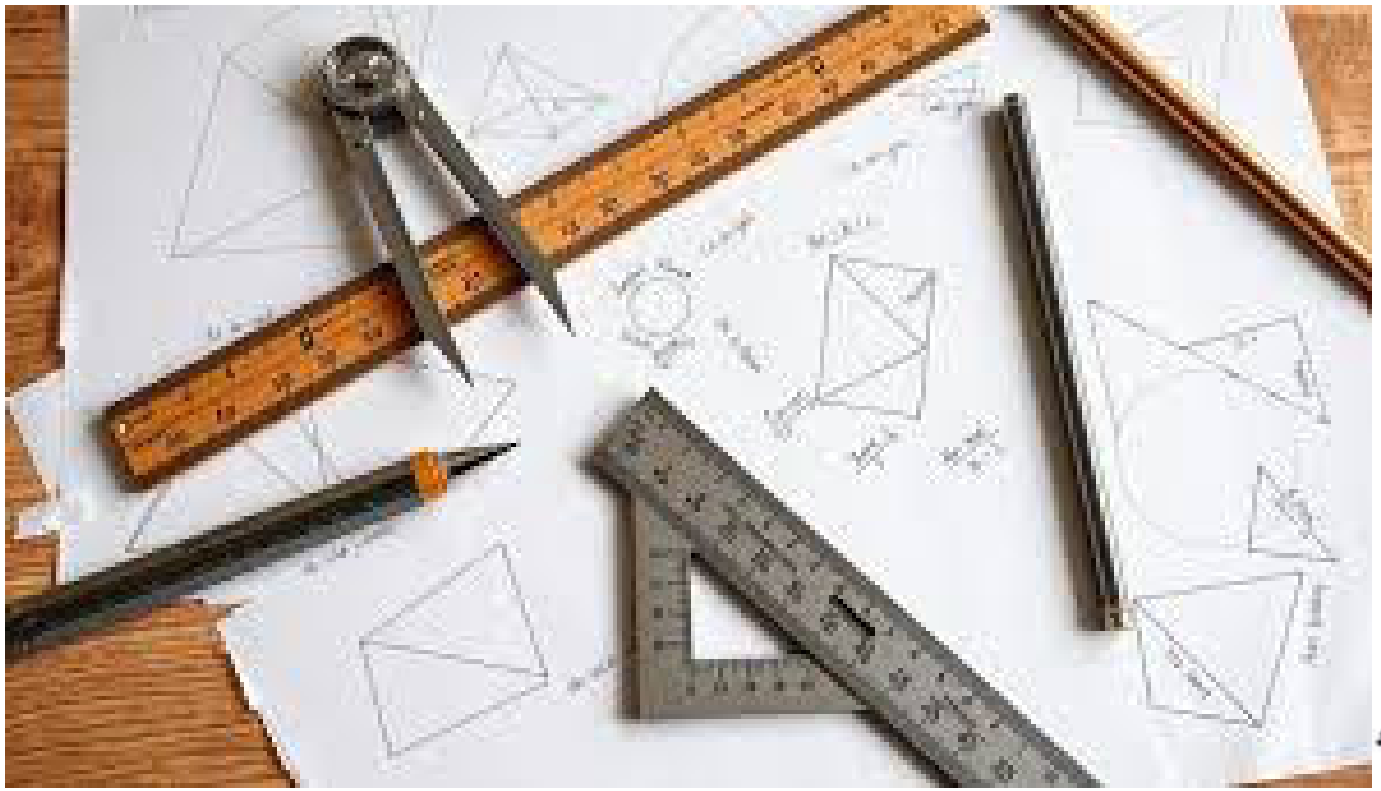
Efficacia didattica dell'algebra di Cartesio

Obiettivi didattici

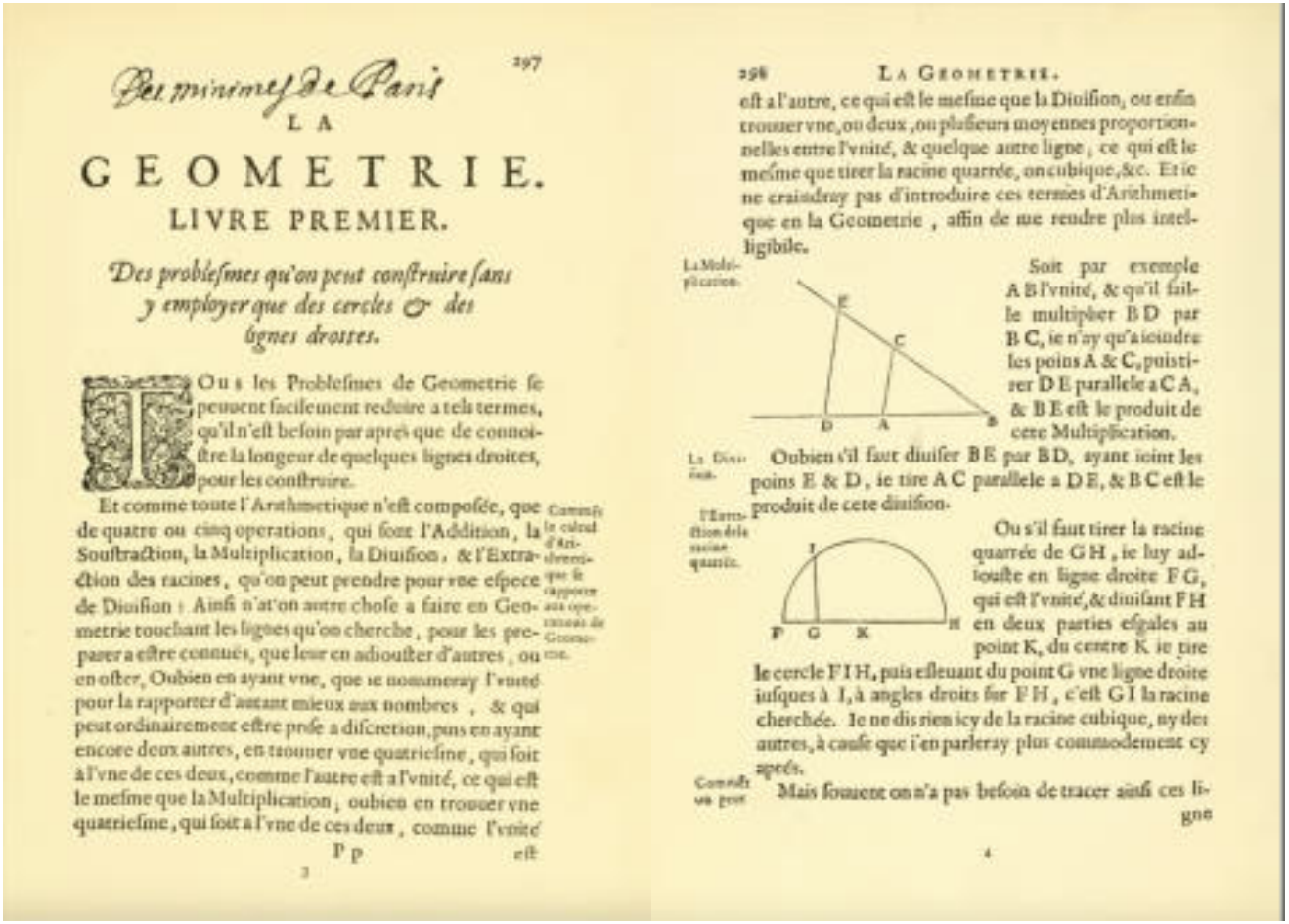
- Migliorare l'insegnamento e l'apprendimento del concetto di funzione nella scuola secondaria di secondo grado.
- Consentire di studiare le funzioni evitando inizialmente il riferimento ai numeri reali, concentrandosi sulla relazione.
- Usare la duplice interpretazione:
  - le formule algebriche sono costruzioni geometriche
  - le costruzioni geometriche sono formule algebriche

  per facilitare il passaggio dalla funzione intesa come processo alla funzione intesa come oggetto.

L'Algebra dei segmenti: percorso didattico



Le operazioni fondamentali di Cartesio



Des minimes de Paris

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Soubſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité eſt

Comme ſe ſeruir d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Pp 3

298 LA GEOMETRIE.

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion, ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne, ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligible.

La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

L'Extraction des racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Comme on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces ligne

4

Le operazioni fondamentali di Cartesio

Operazioni costruibili con riga e compasso

- Somma e differenza
- Prodotto e divisione
- Radice quadrata

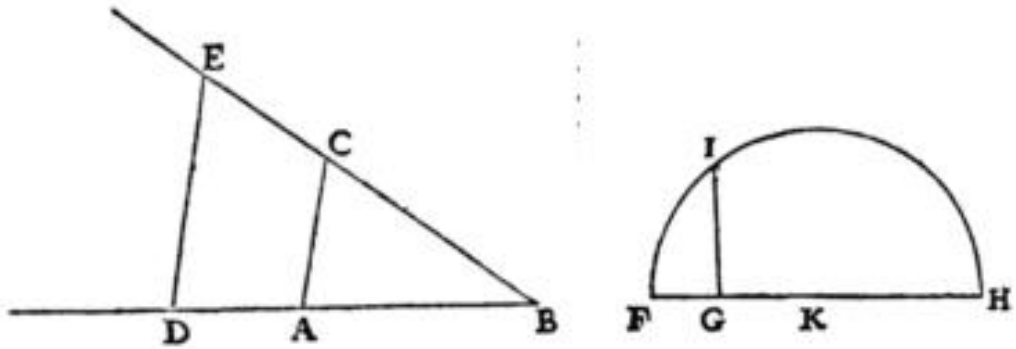


Figura 3. Prodotto e rapporto di due segmenti; la radice di un segmento.

$$AB : BC = BD : BE \implies BE = BC \cdot BD$$
$$FG : GI = GI : GH \implies GI^2 = GH$$

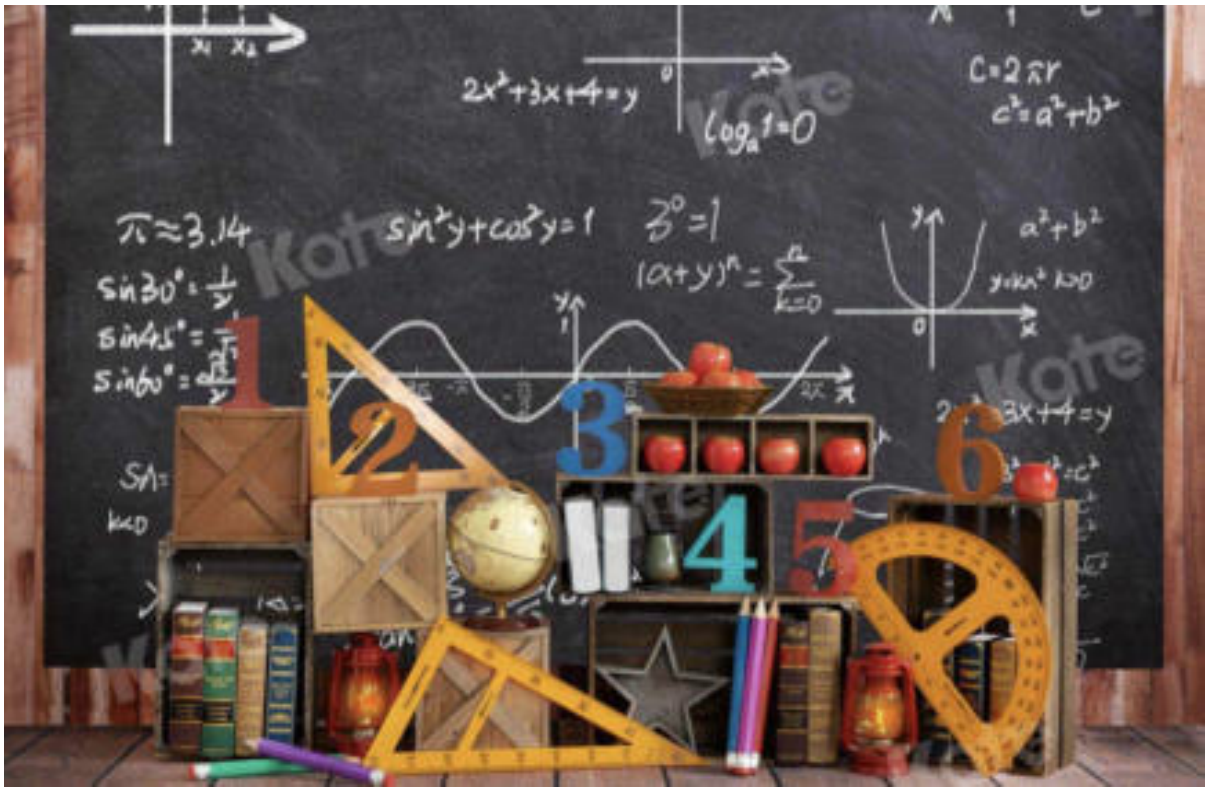
Dalla costruzione al grafico

Combinando le operazioni di base viste in precedenza, a partire da un segmento variabile x è possibile costruire un segmento variabile y. La dipendenza di y da x è espressa nell'algebra dei segmenti tramite un'espressione razionale del tipo $y = f(\sqrt{x})$.

Visualizzazione del grafico:

- Si trasporta il segmento y in modo che un estremo coincida con l'estremo variabile di x.
- y viene posizionato perpendicolarmente al segmento x.
- L'altro estremo di y traccia il luogo di punti che rappresenta il grafico della funzione.

Una proposta di approccio didattico



Il grafico della funzione quadrato $y = x^2$

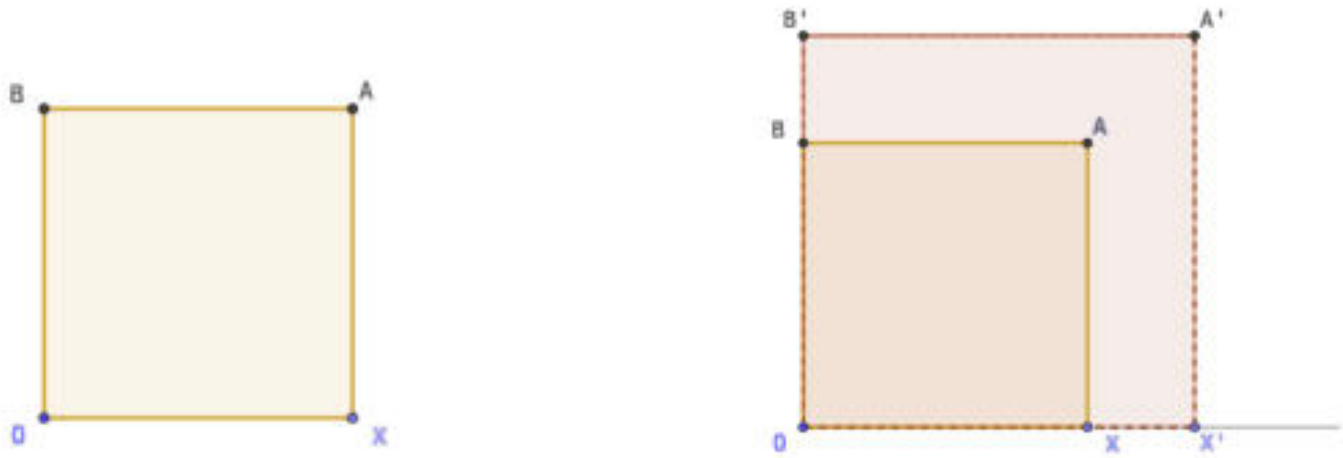


Figura 4. Nella figura a sinistra, la costruzione di un quadrato. Nella figura a destra, il quadrato più grande è ottenuto trascinando la costruzione con l'estremo variabile X del segmento OX.

Costruzione del rettangolo equivalente

La scelta di OU ci permette di rappresentare la variazione dell'estensione del quadrato su OX con un rettangolo che ha un segmento fisso e uno variabile.

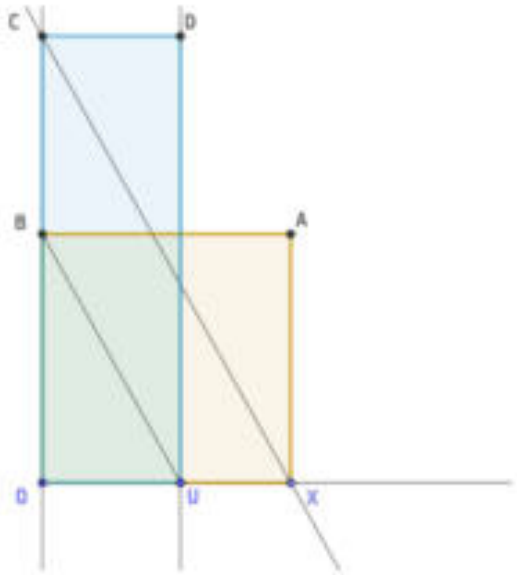


Figura 5. Uso del teorema di Talete per costruire un rettangolo equivalente a un quadrato.

Costruzione del rettangolo equivalente

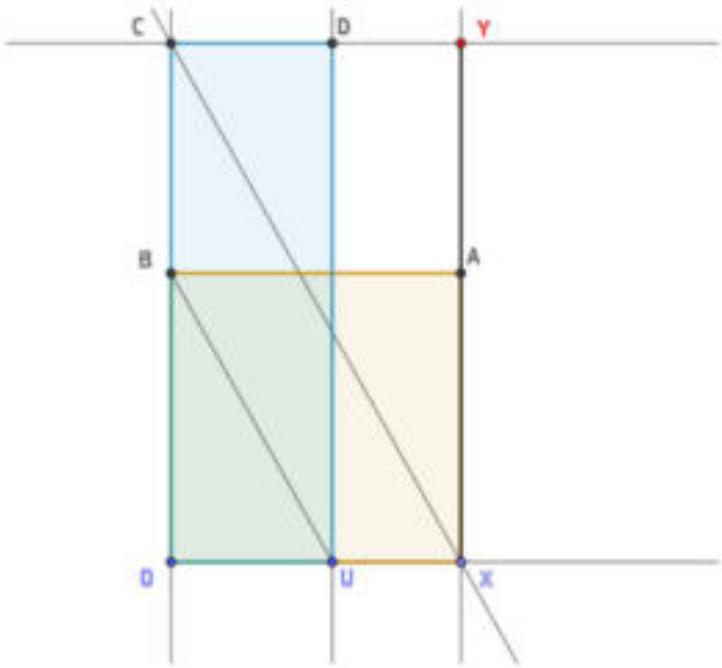


Figura 6. Trasporto di un lato di un rettangolo avente l'altro lato fisso perpendicolarmente a un segmento variabile.

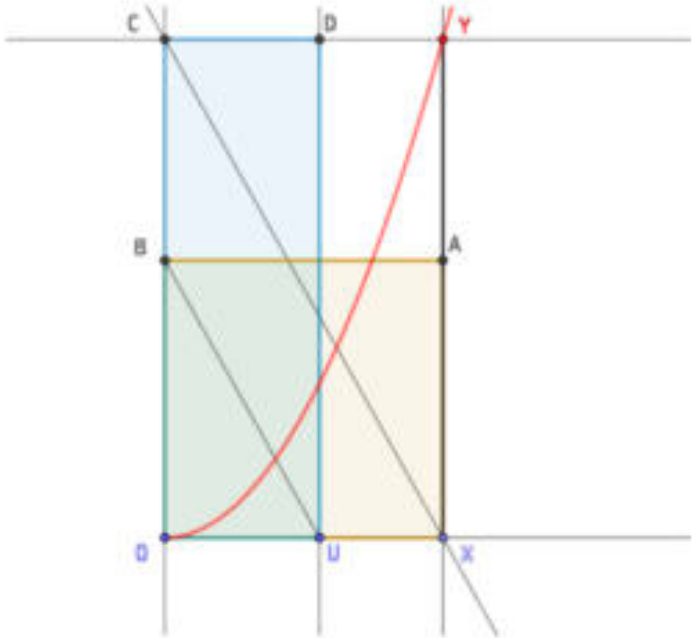
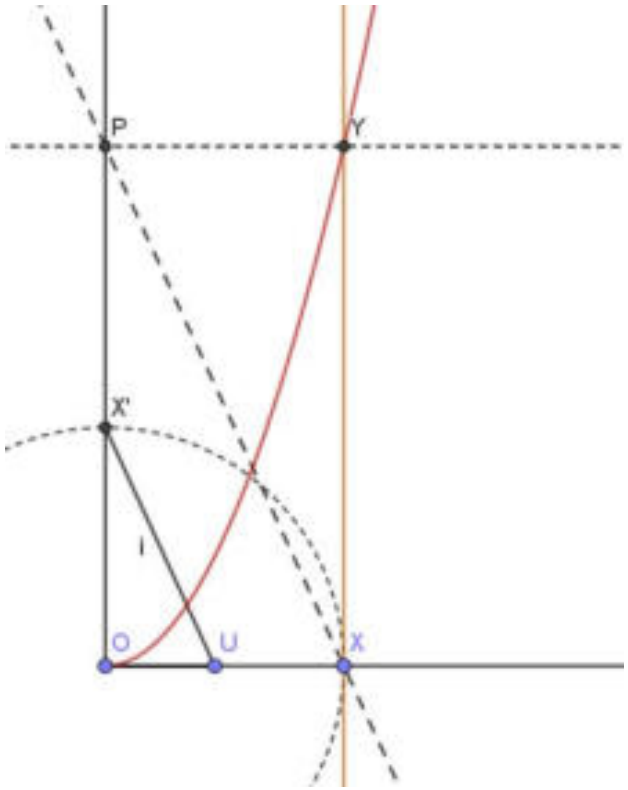


Figura 7. Luogo generato dagli estremi del segmento XY al variare dell'estremo X del segmento variabile OX.

Nell'algebra di Cartesio, la proporzione $y : x = x : 1$ (dove $1 = OU, x = OX$ e $y = OC = XY$), che descrive il "sintomo" della curva luogo di punti Y, si può esprimere con l'equazione $y = x^2$.



Il grafico della funzione cubo $y = x^3$

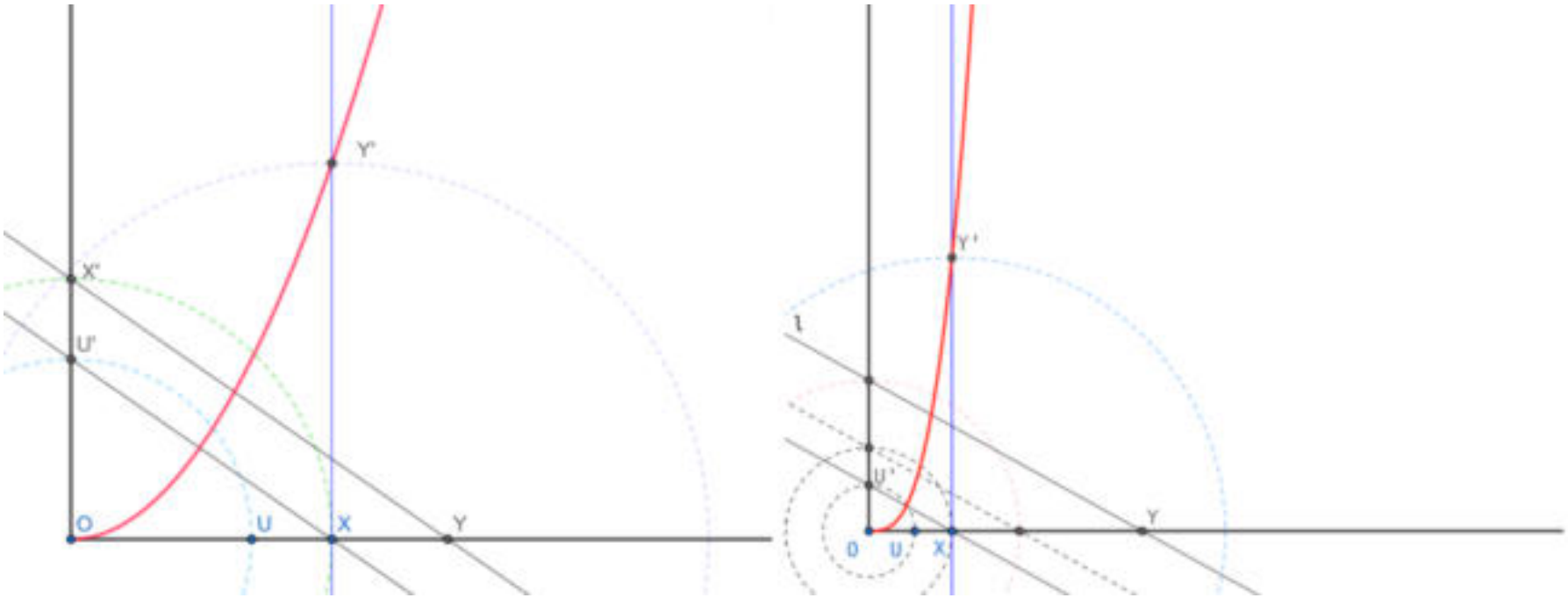


Figura 8. Iterando il procedimento precedente ottengo la funzione cubo.

Il grafico della funzione ipercubo $y = x^4$

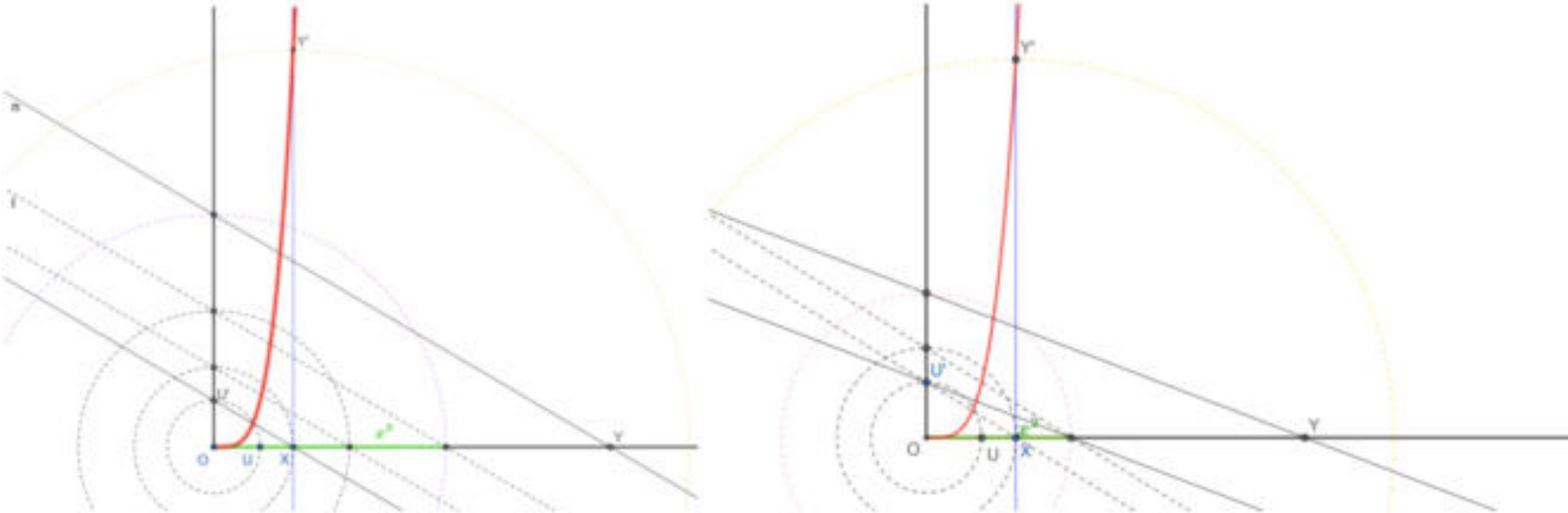
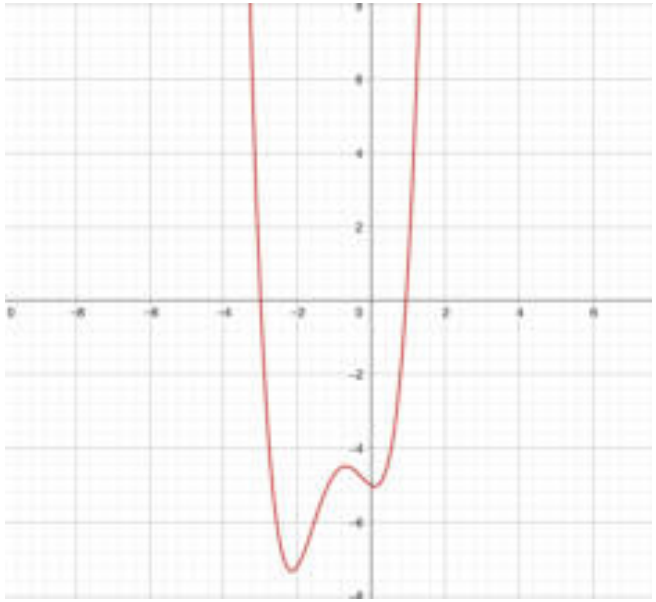
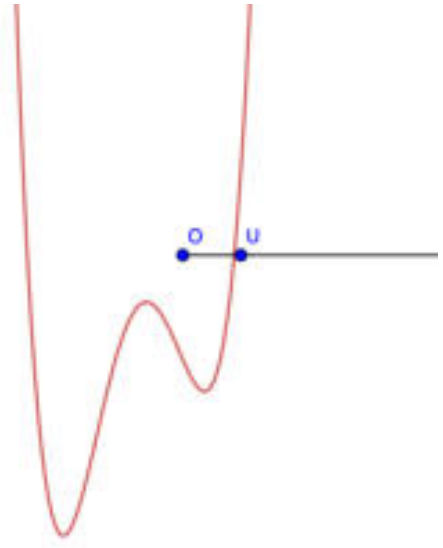


Figura 9. Nella figura a sinistra, la costruzione del segmento y $= x \cdot x^{\mathbf{3}}$. Nella figura a destra, la costruzione del segmento $y = x^{\mathbf{2}} \cdot x^{\mathbf{2}}$.

Il grafico di una funzione polinomiale

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$





https://www.geogebra.org/material/edit/id/efrewqajp

Il grafico della funzione reciproco $y = \frac{1}{x}$

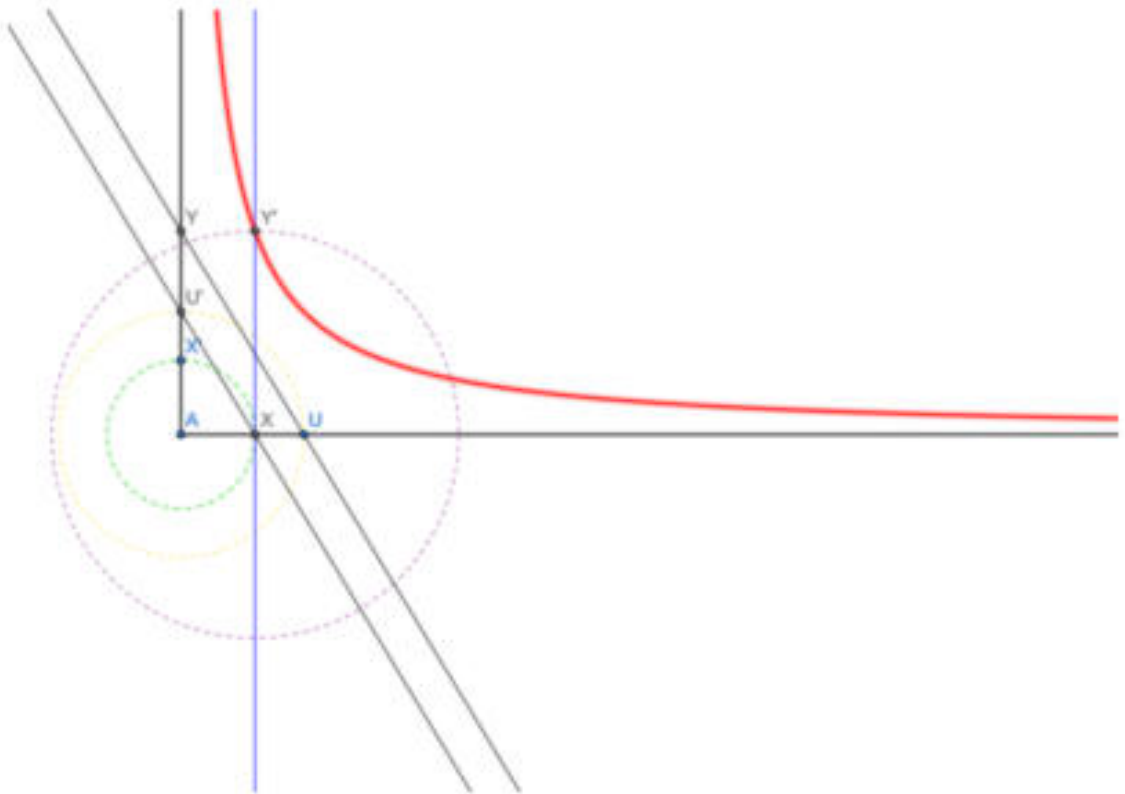


Figura 10. Costruzione del segmento $y = \frac{1}{x} = XY'$ a partire dal segmento $x = AX$, utilizzando il teorema di Talete.

Il grafico della funzione radice quadrata $y = \sqrt{x}$

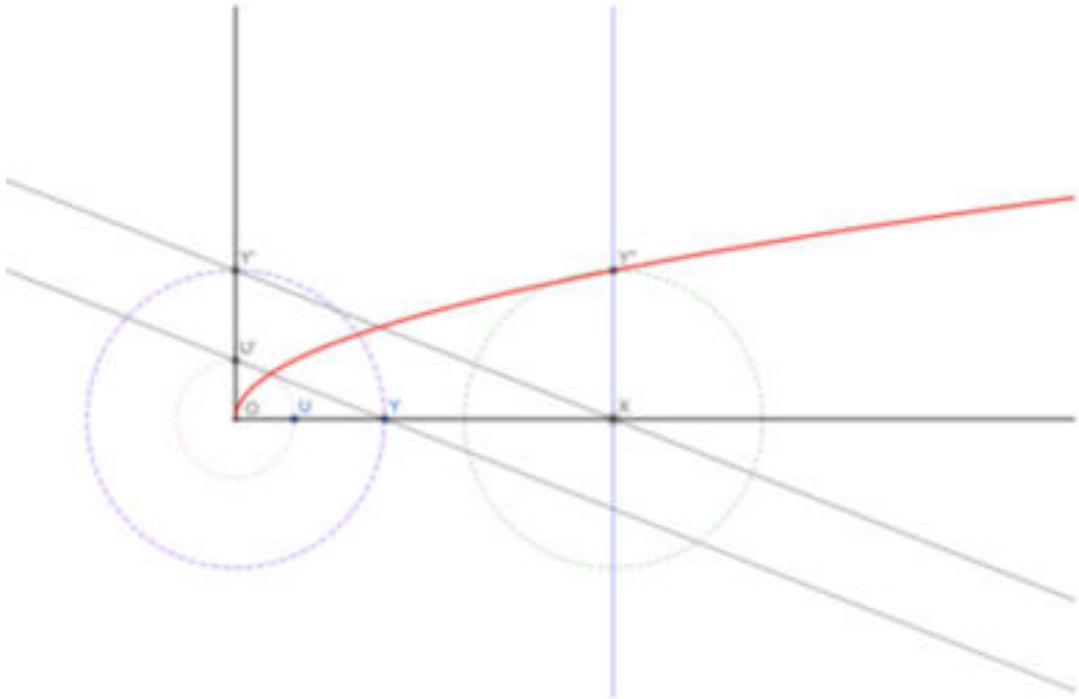


Figura 11. Costruzione del segmento $y = \sqrt{x} = XY''$ a partire dal segmento $x = OY$.

Il grfico della funzione inversa

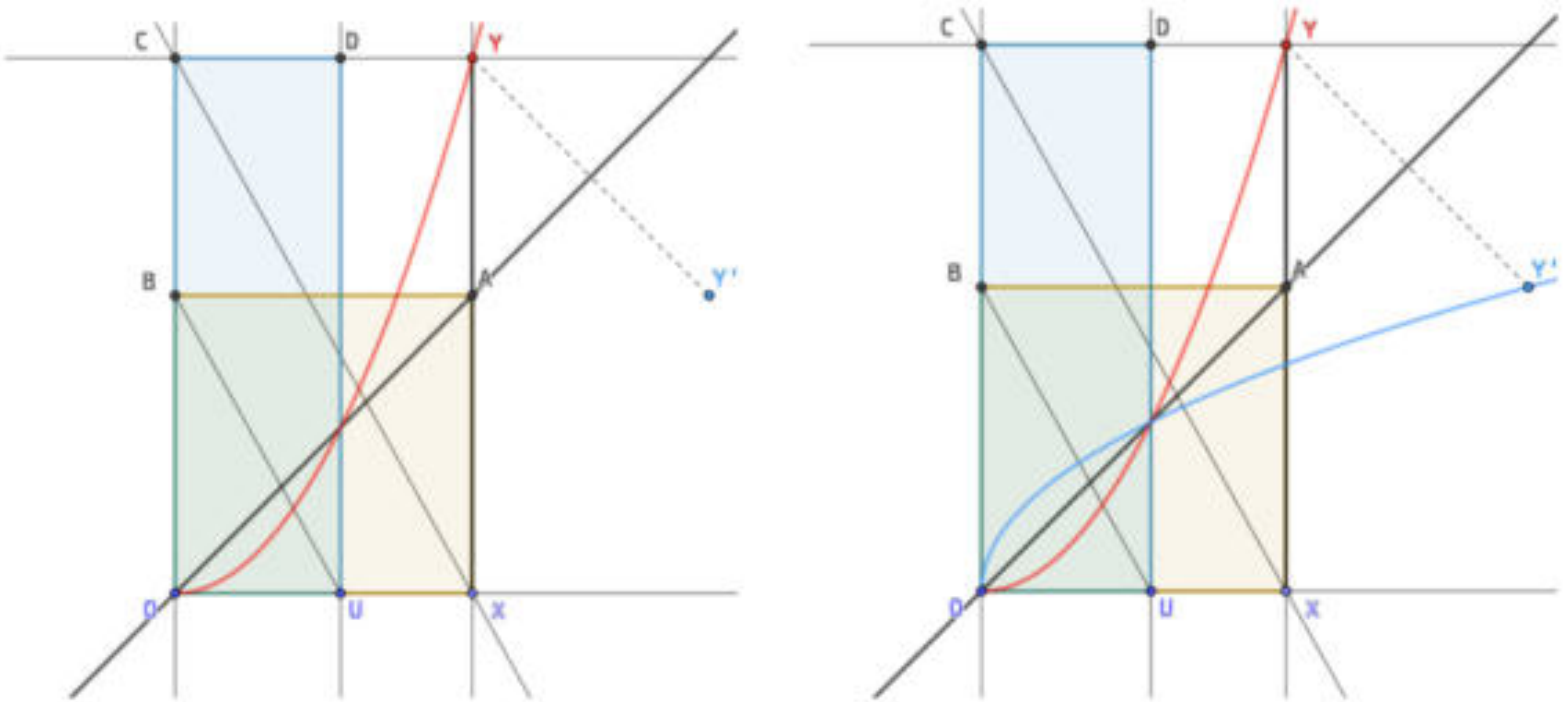


Figura 12. Il luogo dei punti simmetrici rispetto alla bisettrice dei due semiassi dei punti del grafico di $y = f(x)$ è il grafico della funzione $y = f^{-1}(x)$.

L'algebra dei punti

Cos'è l'algebra dei punti?

L'algebra dei segmenti di Cartesio è una **sottoalgebra** di una struttura più complessa, anch'essa definita tramite costruzioni geometriche elementari.

Algebra dei punti

- Struttura definita sui punti di un piano euclideo.
- Operazioni: prodotto e somma.
- Punti speciali: $O = (0, 0)$ e $U = (1, 0)$.
- L'algebra dei punti è isomorfa ad una sottoalgebra dei numeri complessi, ovvero la sottoalgebra dei punti costruibili con riga e compasso.

Perché introdurre l'algebra dei punti?

Concetti algebrici fondamentali

Fornisce un'immagine procedurale geometrica per nozioni astratte come:

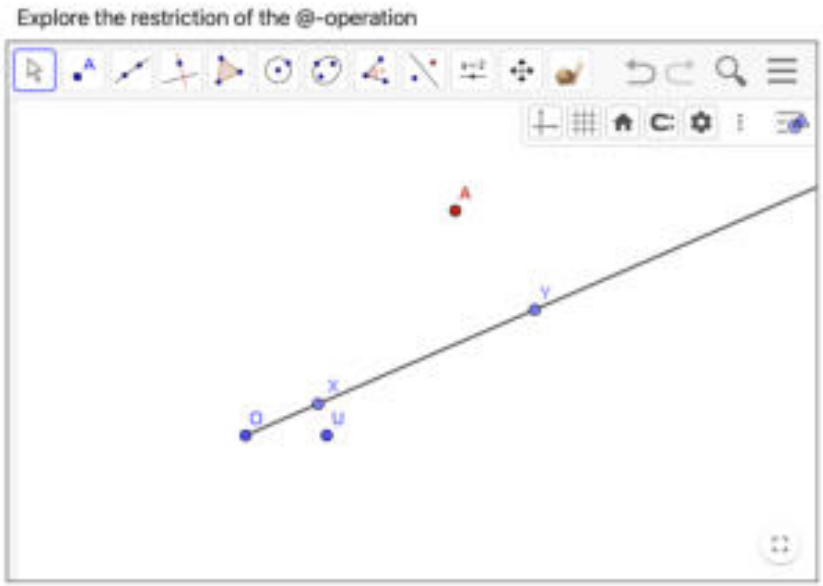
- sottoalgebre
- algebre quozienti
- equazioni di variabile complessa a coefficienti complessi.

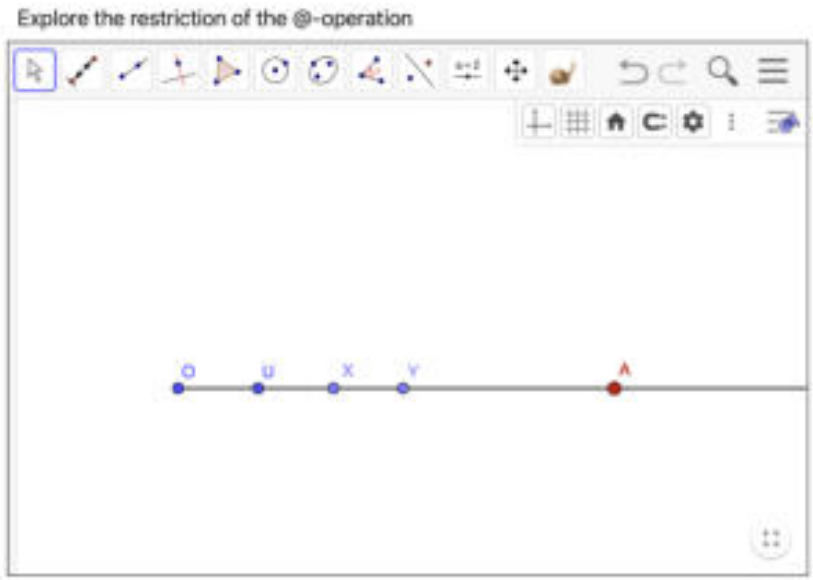
Funzioni Complesse

Permette di esplorare la nozione di polinomio complesso e di funzione razionale complessa da una prospettiva geometrica e costruttiva.

Operazione @

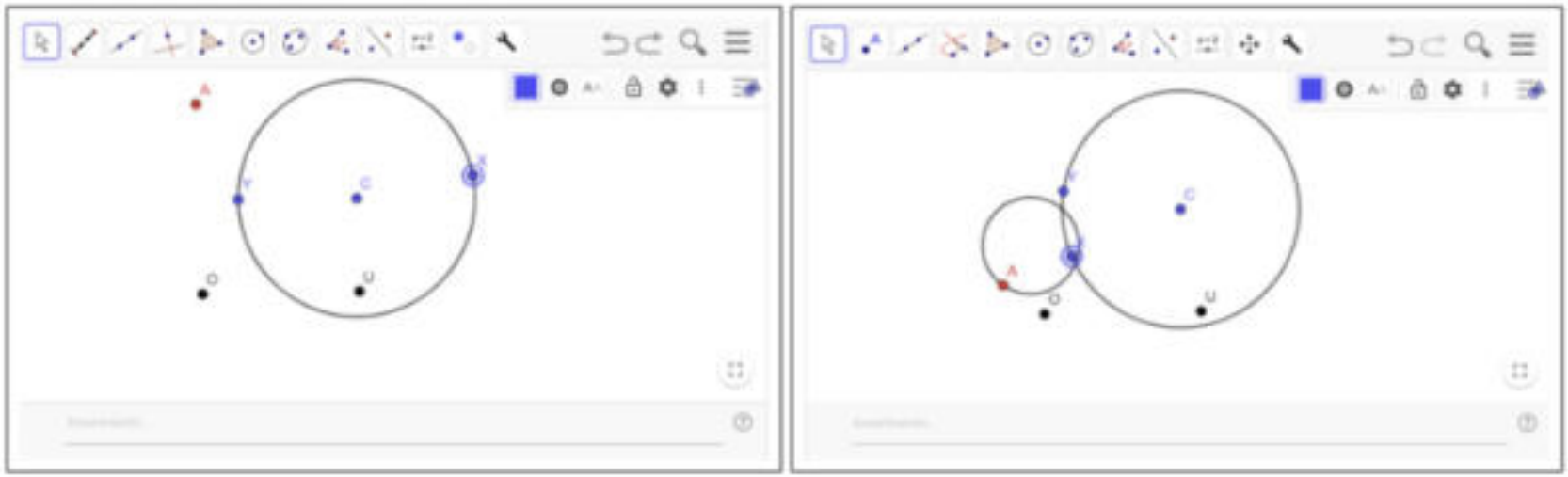
Restrizioni dell'operazione @





Muovendo X e Y su una retta passante per l'origine O, il punto $A = X@Y$ rimane su una retta passante per l'origine. La retta descritta da A è la stessa descritta da X e Y se e solo se è la retta OU.

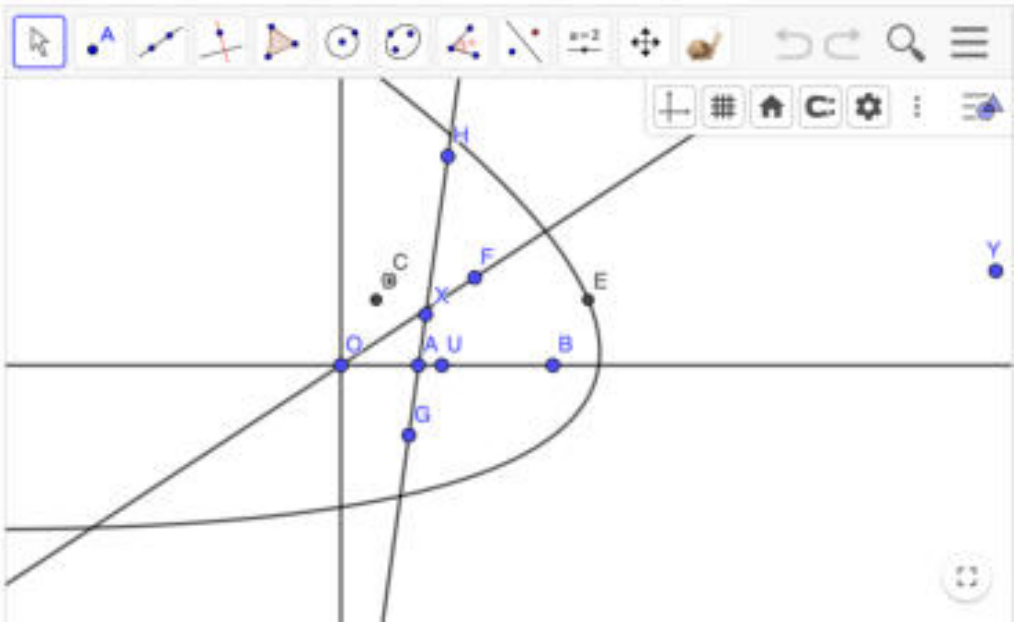
Restrizioni dell'operazione @



Spostando X e Y su un cerchio centrato in O, il punto $A = X@Y$ appartiene ad un cerchio centrato in O. Il cerchio descritto da A è lo stesso di quello descritto da X e Y se e solo se è il cerchio centrato in O che contiene U.

Equazioni nel campo complesso

Consideriamo l'equazione
$ax^2 + b = 0$



Nuovi strumenti

https://www.geogebra.org/classroom/jxhvvfbf

Conclusioni

Analogia didattica:

l'efficacia dell'algebra dei segmenti nel superare gli ostacoli nell'apprendimento del concetto di funzione (oggettivazione dei processi) suggerisce un uso analogo dell'algebra dei punti.