La storia della matematica in un’esperienza didattica: il laboratorio di geometria ricorrente

Ciclo di seminari promossi dalla Società Italiana di Storia delle Matematiche

15 gennaio 2025

“Lo sviluppo storico è un lavoro attivo di secoli”: la storia della matematica entra in classe

Giovanna Rinchiusa
Maria Alessandra Vaccaro

Università degli Studi di Palermo
Dipartimento di Matematica e Informatica

La storia della matematica nell'insegnamento

«La storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti (pensiamo soprattutto agli aspetti interdisciplinari con la filosofia, con l'arte e con molte altre discipline), va vista, in questo contesto, come un possibile ed efficace strumento di laboratorio adatto a motivare adeguatamente e ad indicare possibili percorsi didattici per l'apprendimento di importanti contenuti matematici.»

[Matematica 2003]

Perché il laboratorio di geometria ricorrente?

- Il principio di induzione risulta spesso un argomento ostico per gli alunni.
- L'idea alla base del principio di induzione è rappresentata da una sorta di reazione a catena, tipica anche di un processo ricorsivo, ovvero un processo nella cui definizione richiama sé stesso.
- Pensando al processo ricorsivo come una possibile chiave di volta per una più facile comprensione dell'induzione, abbiamo pensato di progettare e realizzare un percorso laboratoriale incentrato proprio sulla ricorsione.

Il laboratorio di matematica

«Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).
L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.»

[Matematica 2003]

La geometria ricorrente

La ***geometria ricorrente*** fu così denominata nel 1877 dal matematico francese Gaston de Longchamps (1842-1906), che, partendo da alcuni punti notevoli del triangolo, quali il **circocentro**, l'ortocentro e il baricentro, e da oggetti legati sempre alla geometria del triangolo, quali il **cerchio dei nove punti** e la retta di Simson-Wallace, diede vita ad alcune catene di teoremi che dipendono l'uno dall'altro in modo iterativo.

- *Note de Géométrie*, 1877.
- *La Géométrie Récurrente*, 1883.

Quadro storico di riferimento: la **geometria del triangolo**.

La geometria del triangolo

«L'ensemble des connaissances désignées par le terme ***nouvelle géométrie du triangle*** consiste à prendre un triangle de référence, à construire à partir de lui des points, des droites et des cercles remarquables et à regarder la façon dont ils sont liés, c'est-à-dire s'il existe un mode de conjugaison (ou une transformation) pour passer de l'un à l'autre.»

[Romera-Lebret]

- Prima metà del XIX secolo: Crelle, Grebe, Jacobi e Nagel in Germania.
- Seconda metà del XIX secolo: Brocard, Lemoine, de Longchamps, d'Ocagne, Vigarié, Tarry in Francia, Neuberg in Belgio, Casey in Irlanda, Tucker in Inghilterra.

La geometria del triangolo

Tra il 1873 e il 1905 vengono pubblicati più di 700 articoli in circa 60 riviste da più di 200 autori.

Riviste francesi:

- Nouvelles Annales de Mathématiques
- Comptes rendus de l'Association française pour l’avancement des sciences
- Bulletin de la Société Mathématique de France
- Nouvelle Correspondance Mathématique (Mathesis dal 1880)
- Journal de mathématiques élémentaires
- Journal de mathématiques spéciales
- Comptes rendus de l'Académie des sciences
- Intermédiaire des mathématiciens
- Journal de Liouville

Gaston de Longchamps (1842 – 1906)

- Nasce l'1 marzo 1842 ad Alençon, in Francia. Per ragioni economiche si separa dalla famiglia e viene mandato all'età di nove anni in un liceo di provincia per il quale ottiene una borsa di studio. Continua i suoi studi a Parigi nei licei Carlomagno e Luigi il Grande.

- Nel 1863 entra nella *École normale supérieure* e segue i corsi di Charles Hermite, Charles Auguste Briot e Michel Chasles. Nel 1866 inizia la carriera di professore in licei di provincia, interrotta durante la guerra franco-prussiana del 1870, per la quale si arruola come sottotenente.

Gaston de Longchamps

- Membro di molte società scientifiche internazionali, tra cui la Società Reale delle Scienze di Liegi, l'Accademia delle Scienze di Amsterdam, la Società matematica di Francia e l'Accademia delle Scienze di Lisbona.
- Dal 1882 direttore delle riviste *Journal de Mathématiques Élémentaires* e *Journal de Mathématiques Spéciales*.
- Dal 1900 esaminatore presso la Scuola militare di Saint Cyr fino alla morte, il 9 luglio del 1906.

Produzione scientifica:

- Opere a carattere didattico tutte edite da Delagrave di Parigi.
- Note e memorie pubblicate in vari giornali quali *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *Mathésis*, *Nouvelle Correspondance mathématique*.
- Risposte a questioni proposte nel *Intérmédiaire des mathématiciens*.

Il laboratorio di geometria ricorrente

- Destinatari: classe III D del Liceo Scientifico Statale “Stanislao Cannizzaro” di Palermo.
- Durata: 15 ore suddivise in 6 incontri, uno a settimana dalla fine di marzo all’inizio di maggio 2023.
- Oggetto di studio: la **catena di de Longchamps associata al circocentro,** le cui configurazioni, coinvolgendo solo semplici teoremi di geometria piana, risultano le più intuitive per gli alunni.

Strumento di mediazione per l’apprendimento

Per la realizzazione del laboratorio, come strumento di mediazione per l’apprendimento, abbiamo utilizzato un software di geometria dinamica mediante il quale gli alunni possono **esplorare**, **osservare**, **formulare congetture** e **validarle**.

«Lo studente entra in contatto con il sapere geometrico incorporato nel software, impara a osservare e riconoscere “fatti geometrici” e può essere avviato a un significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all’interno di una teoria più o meno ben precisata, perché una certa proprietà osservata vale.»

[Matematica 2003]

GeoGebra

- Dallo spazio grafico tradizionale e dagli strumenti grafici di disegno allo spazio grafico virtuale e ai comandi grafici disponibili nel software.

- Permette agli alunni di esplorare, formulare e validare congetture, favorendo così un **intreccio tra l'aspetto pratico ed esplorativo con quello teorico e dimostrativo**.

GeoGebra

- La **funzione di trascinamento** consente, tramite l'uso del cursore, di muovere gli elementi di una figura nello spazio virtuale permettendo di ottenere altre figure della stessa famiglia della prima. In tal modo non siamo più di fronte all'unica copia prodotta dal disegno tradizionale che costituisce dunque un disegno statico, ma la dinamicità del software permette di visualizzare un ampio spettro di rappresentazioni della stessa figura.

- GeoGebra dà la possibilità di costruire e salvare **Macro**, nuovi strumenti che permettono di ripetere, mediante un semplice comando, una serie, anche molto complessa, di operazioni.

Approcci metodologici

Lavoro di gruppo

«Il lavoro di gruppo, rispetto a quello individuale, si prefigge anche altre finalità di tipo comportamentale, come il saper stare con gli altri, discutere in gruppo, rispettare l'opinione dell'altro e anche saper difendere la propria opinione, argomentando e dibattendo.»

[Matematica 2003]

Discussione matematica

«In essa, l'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe e influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo, in quanto ha presenti gli obiettivi generali e specifici dell'attività proposta.»

[Matematica 2003]

Obiettivi dell'intervento

Favorire l'apprendimento degli argomenti della geometria euclidea.

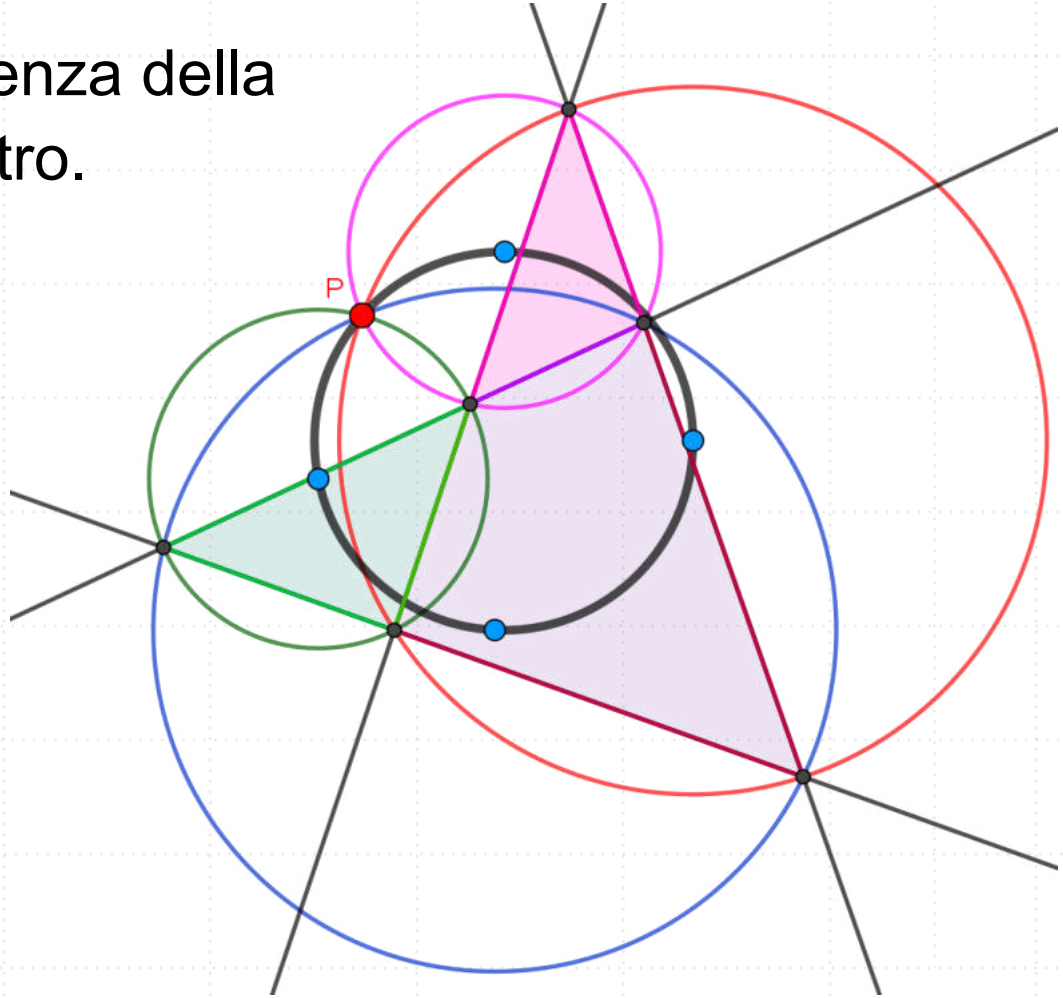
Sviluppare dal punto di vista didattico le capacità argomentative degli alunni.

Introdurre il processo ricorsivo in geometria.

Origini storiche della catena sul circocentro

Nel 1827-28 Jacob Steiner (1796-1863) propone da dimostrare dieci questioni riguardanti il quadrilatero completo, ovvero la configurazione che viene fuori considerando quattro rette del piano che si intersecano a due a due.

Le prime questioni costituiscono il punto di partenza della catena di de Longchamps associata al circocentro.



I. Quattro rette, prese a tre a tre, formano quattro triangoli tali che le circonferenze ad essi circoscritte passano tutte per uno stesso punto P.

II. I centri delle quattro circonferenze appartengono, insieme al punto P, ad una stessa circonferenza.

Attività 1

Introduzione al software di geometria dinamica GeoGebra mediante alcune costruzioni elementari, quali la circonferenza per tre punti.

Verifica dei prerequisiti che sono gli elementi di base della geometria euclidea piana, in particolare:

- punti notevoli del triangolo,
- criteri di congruenza e di similitudine dei triangoli,
- somma degli angoli interni di un poligono,
- relazione tra angoli alla circonferenza e angoli al centro che insistono sullo stesso arco,
- congruenza di angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco,
- condizione di inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza.

Attività 2

Principio di induzione: è stato definito ed è stato utilizzato per determinare la somma dei primi *n* numeri dispari, la somma dei primi *n* numeri pari e la somma degli angoli interni di un poligono di *n* lati.

Processo ricorsivo in ambito geometrico: è noto che tre rette nel piano che si intersecano a due a due determinano un triangolo e quindi una circonferenza che lo circoscrive.

Cosa accade quando si incrementa di una unità il numero delle rette iniziali, ovvero passando da 3 a 4 rette?

Obiettivo: considerare le 4 rette di partenza in gruppi da 3 escludendo una retta alla volta.

Attività 3

I passo della catena sul circocentro

Al fine di indagare in che relazione sono le 4 circonferenze e i relativi centri, sono state poste alla classe le seguenti **domande stimolo**:

1. Quanti triangoli si generano da quattro rette che si intersecano a due a due?

2. Quanti circonferenze?

3. Che caratteristica hanno tali circonferenze?

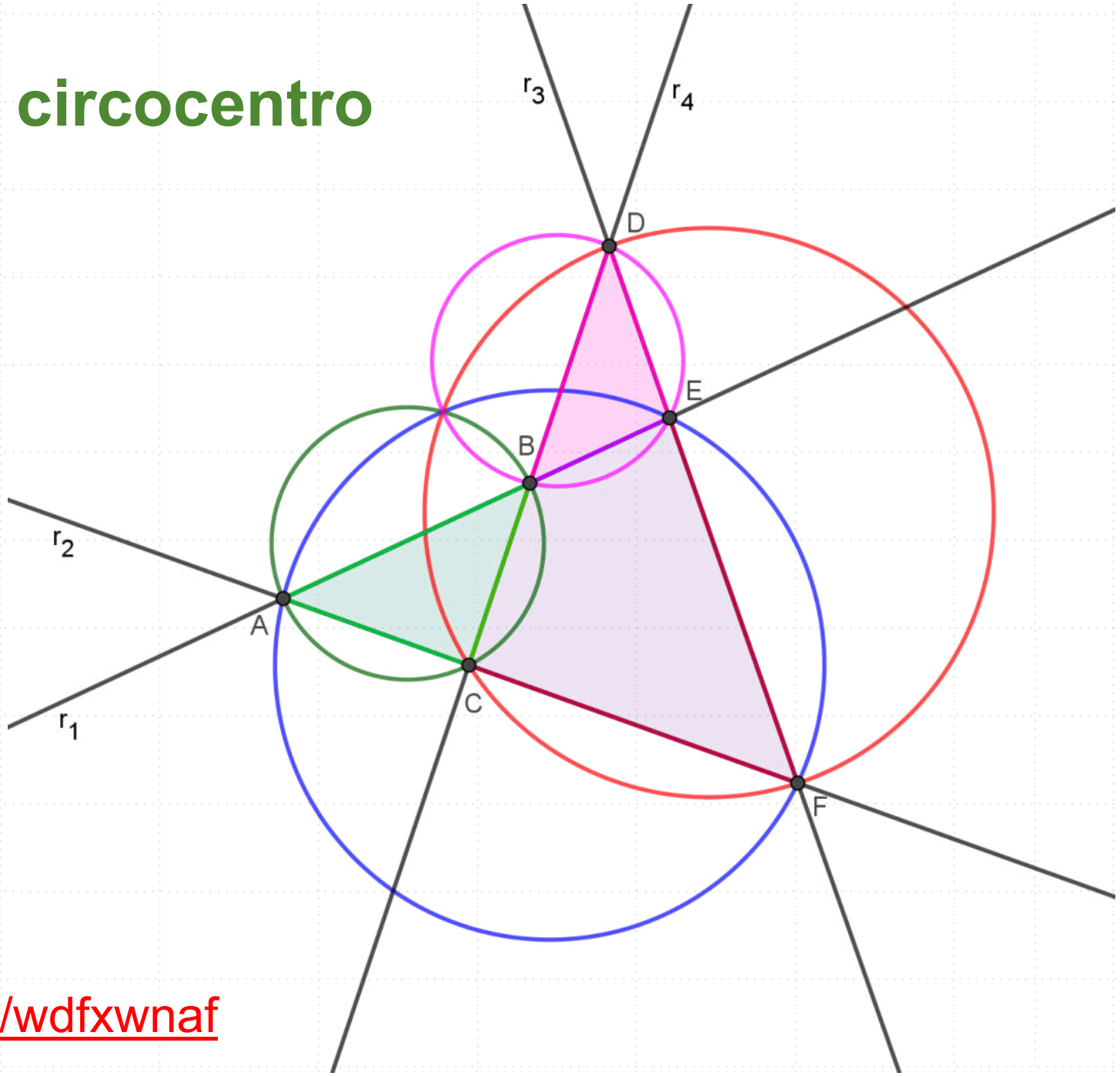
4. E i loro centri?

La classe suddivisa in alcuni gruppi ha avviato con l'ausilio di GeoGebra una fase di esplorazione e di formulazione di congetture.

I passo della catena sul circocentro

Da quattro rette r_1, r_2, r_3 e r_4, che si intersecano a due a due nei punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, si ottengono quattro insiemi di tre rette ciascuno.

Ogni insieme determina un triangolo e una circonferenza ad esso circoscritta. Pertanto si hanno in totale quattro triangoli (*ABC*, *AEF*, *BDE*, *CDF*) e quattro circonferenze.

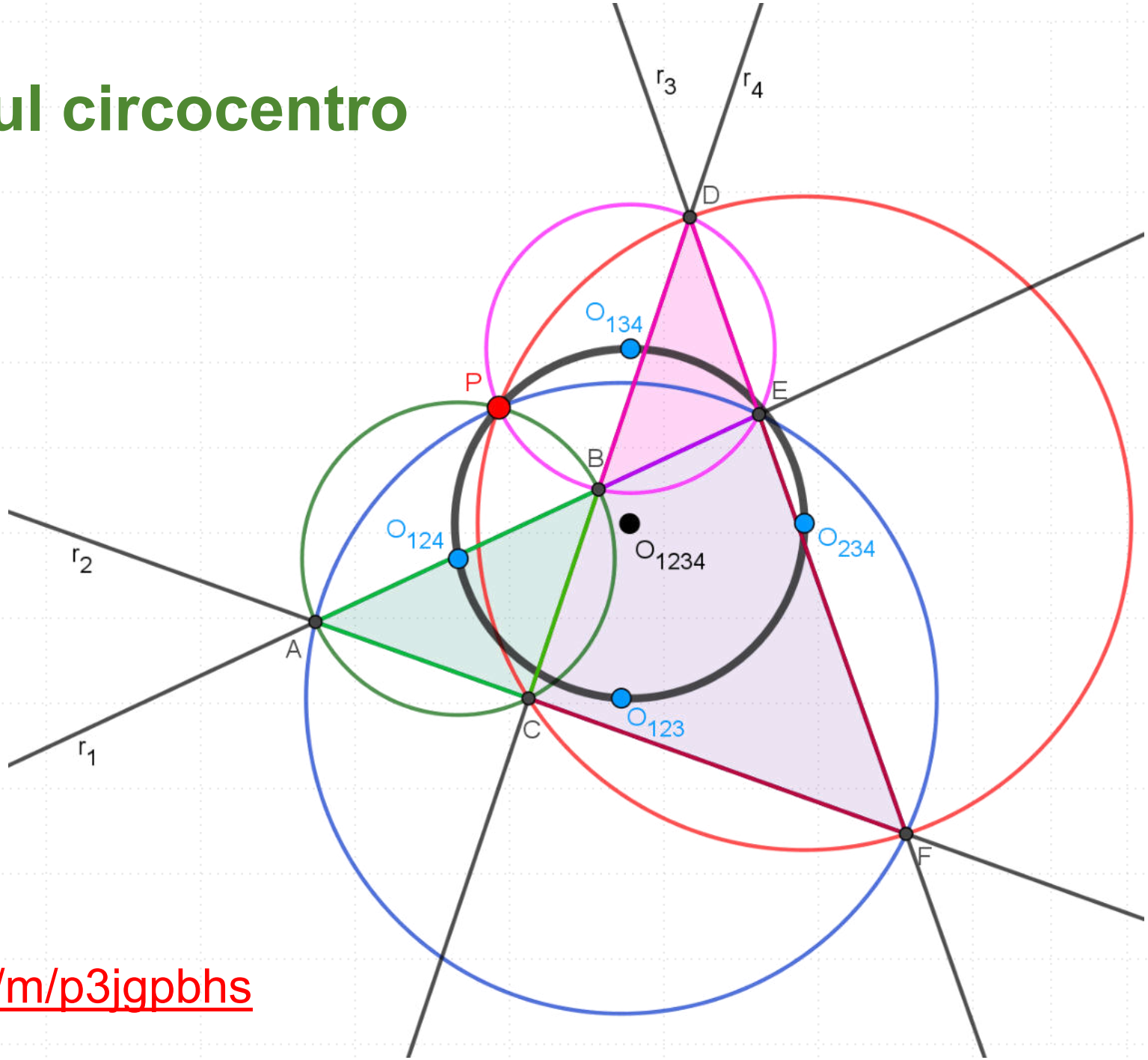


Link: https://www.geogebra.org/m/wdfxwnaf

I passo della catena sul circocentro

Le quattro circonferenze si incontrano in un punto *P*.
I centri delle quattro circonferenze, O_{123}, O_{124}, O_{134} e O_{234}, appartengono tutti ad una stessa circonferenza.

Nota: anche il punto *P* appartiene alla circonferenza per i punti O_{123}, O_{124}, O_{134} e O_{234}.



Link: https://www.geogebra.org/m/p3jgpbhs

Macro

Si conclude l'attività costruendo e salvando la Macro relativa alla circonferenza passante per i circocentri O_{123}, O_{124}, O_{134} e O_{234}.

1. Dal menu *Strumenti* selezionare *Crea Nuovi Strumenti*.
2. Indicare come *Oggetti iniziali* le quattro rette di partenza.
3. Indicare come *Oggetti finali* la circonferenza.
4. Scegliere il *nome* e l'*icona* (opzionale) per il nuovo strumento.

Dal menu *Strumenti* mediante la voce *Organizza Strumenti* è possibile salvare la macro creata in un file di tipo ggt. In tal modo il file potrà essere caricato in un qualsiasi altro file di GeoGebra.

Attività 4

Dall'esplorazione alla dimostrazione

Cosa dimostrare?

1. Le quattro circonferenze circoscritte ai triangoli individuati da quattro rette del piano che si intersecano a due a due si incontrano in uno stesso punto (Prima questione di Steiner 1827-28, Wallace-Scoticus 1804).

Risolutori: Cavill 1805, Pickering 1805, Miquel 1836, e altri.
De Longchamps non la dimostra.

2. I centri delle quattro circonferenze stanno su una stessa circonferenza (Seconda questione di Steiner 1827-28).

Risolutori: Davies 1835, de Longchamps 1883, e altri.

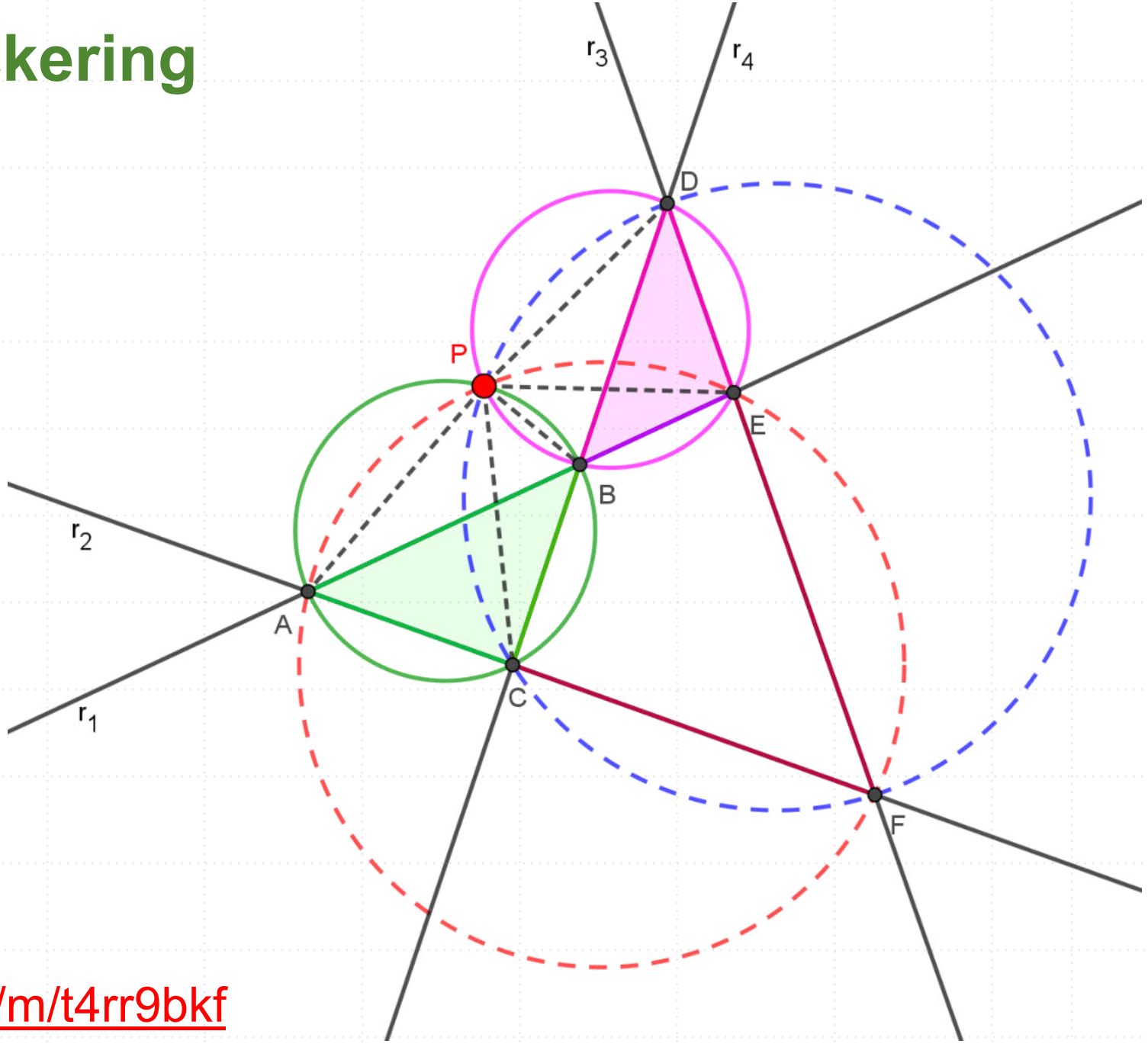
1. Dimostrazione di Pickering

Consideriamo i triangoli *ABC* e *BDE*: le circonferenze che li circoscrivono oltre ad avere in comune il punto *B*, s'intersecano anche nel punto *P*.

Mostreremo che anche le circonferenze circoscritte ai triangoli *CDF* e *AEF* passano per *P*.

Tracciamo i segmenti *PA*, *PB*, *PC*, *PD* e *PE*.

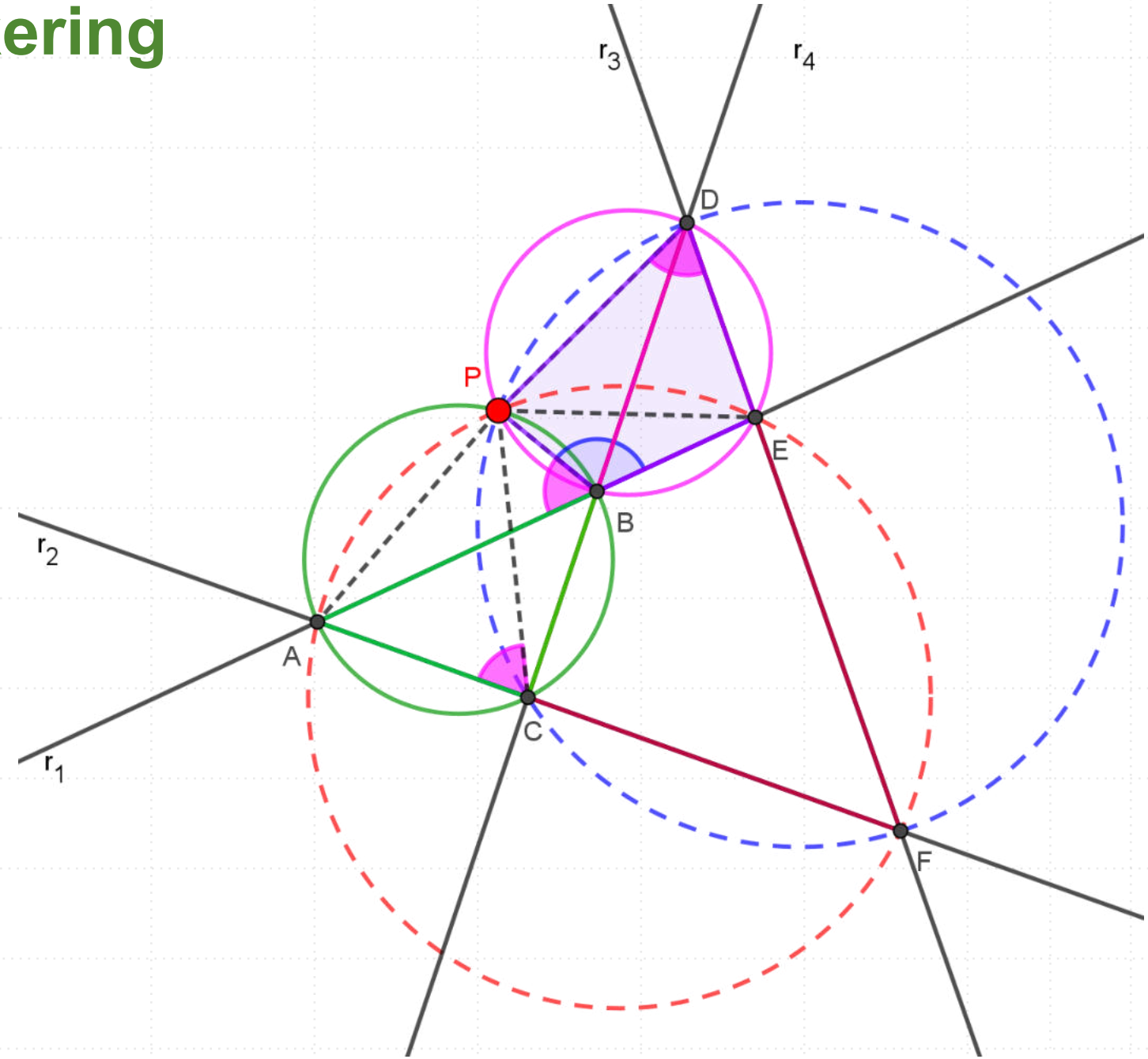
Link: https://www.geogebra.org/m/t4rr9bkf



1. Dimostrazione di Pickering

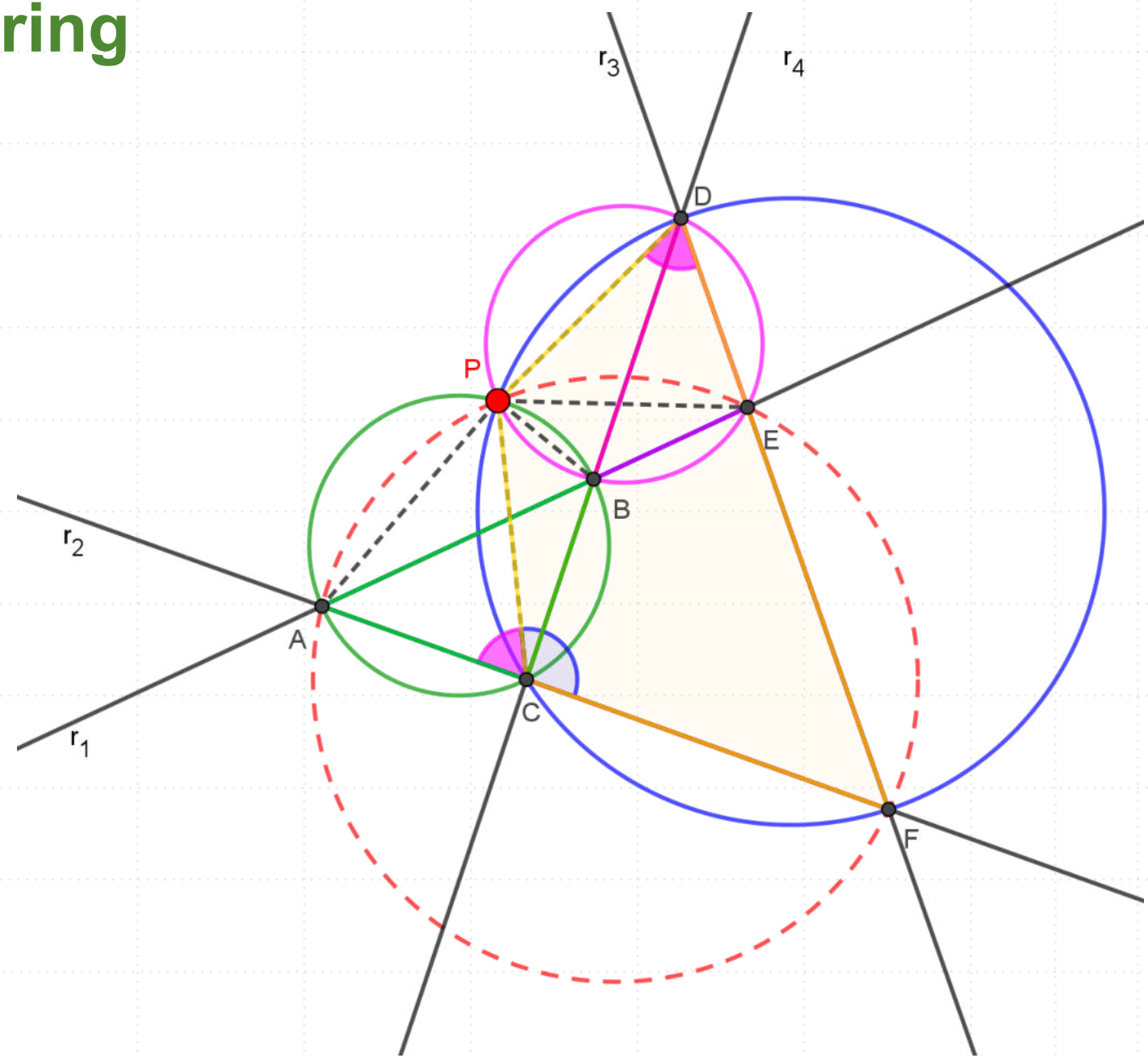
- $P\hat{D}E$ e $P\hat{B}E$ sono supplementari poiché angoli opposti del quadrilatero *PDEB* inscritto in una circonferenza.
- $P\hat{D}E$ = $P\hat{B}A$, in quanto angoli supplementare dello stesso angolo $P\hat{B}E$.
- $P\hat{B}A$ = $P\hat{C}A$, perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco *AP*.

Pertanto $P\hat{D}E$ = $P\hat{C}A$.



1. Dimostrazione di Pickering

- L'angolo $P\hat{C}F$ è supplementare di $P\hat{C}A = P\hat{D}E = P\hat{D}F$.
- Il quadrilatero *PDFC* è inscrivibile in una circonferenza.
- Il punto *P*, comune alle circonferenze circoscritte ai triangoli *ABC* e *BDE* appartiene anche alla circonferenza circoscritta al triangolo *CDF*.

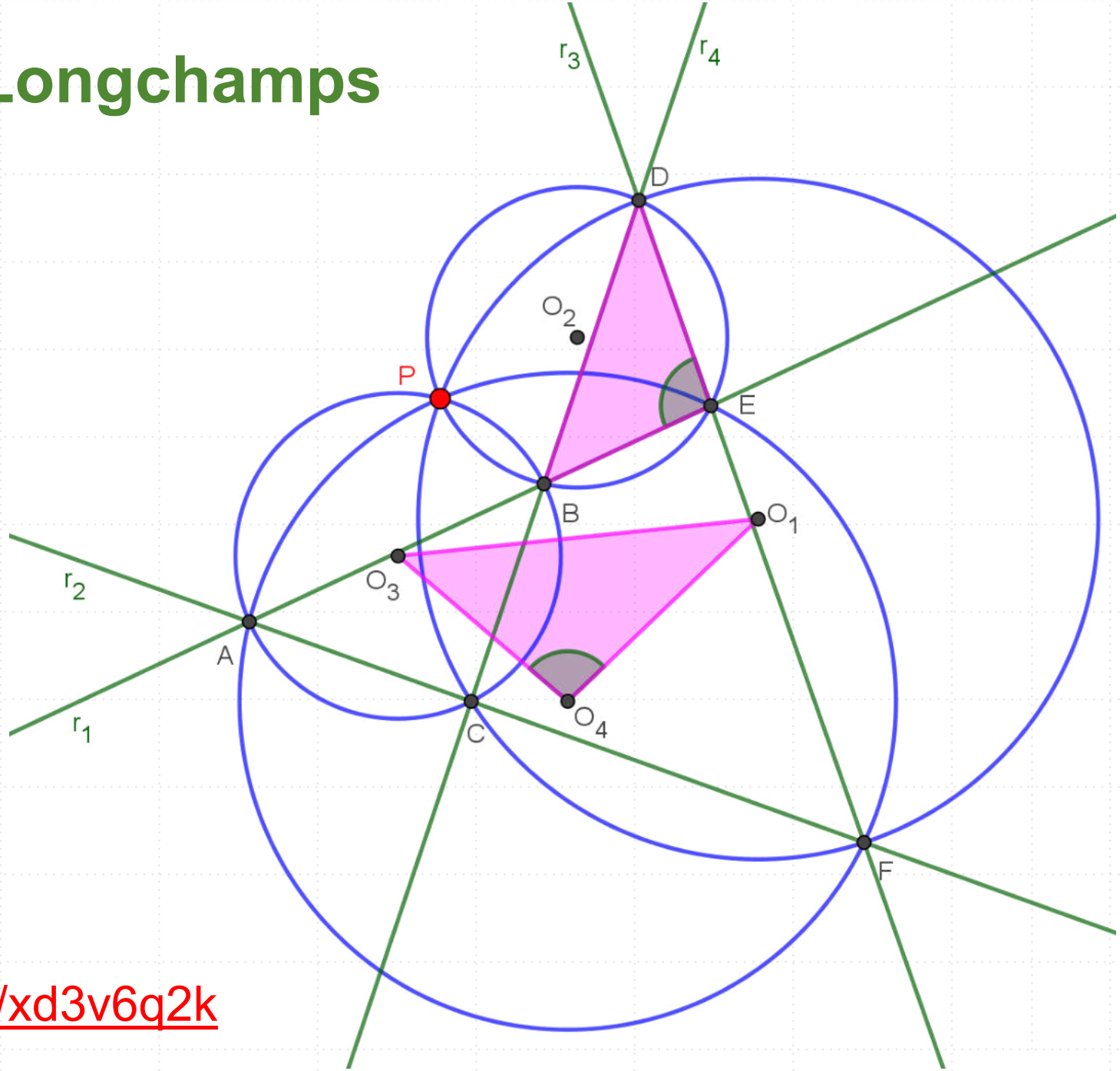


2. Dimostrazione di de Longchamps

Denotiamo con O_3, O_4, O_2, O_1 rispettivamente i circocentri dei triangoli *ABC*, *AEF*, *BDE* e *CDF*.

Mostreremo che il quadrilatero di vertici O_1, O_2, O_3, O_4 è inscrivibile in una circonferenza.

Il triangolo $O_3O_1O_4$ è simile al triangolo *BDE* (determinato dalle rette r_1, r_3 e r_4). Gli angoli *DEB* e $O_1O_4O_3$ sono congruenti.

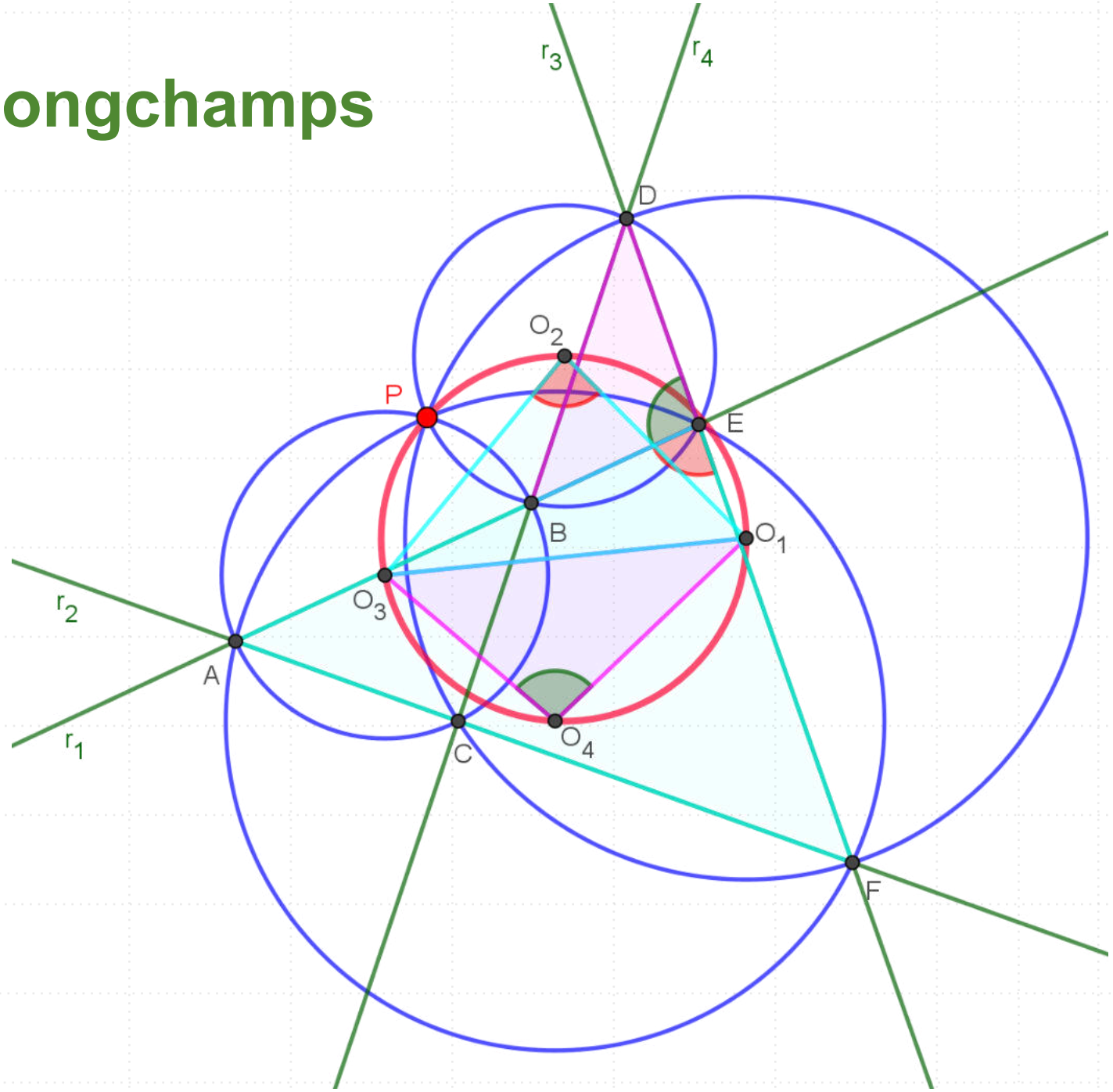


Link: https://www.geogebra.org/m/xd3v6q2k

2. Dimostrazione di de Longchamps

Il triangolo $O_3O_2O_1$ è simile al triangolo AEF (determinato dalle rette r_1, r_2 e r_3). Gli angoli AEF e $O_3O_2O_1$ sono congruenti.

Gli angoli $O_1O_4O_3$ e $O_3O_2O_1$ sono supplementari, poiché congruenti ad angoli adiacenti (DEB e AEF), quindi il quadrilatero di vertici O_1, O_2, O_3, O_4, avendo due angoli opposti supplementari, è inscrivibile in una circonferenza.



Attività 5

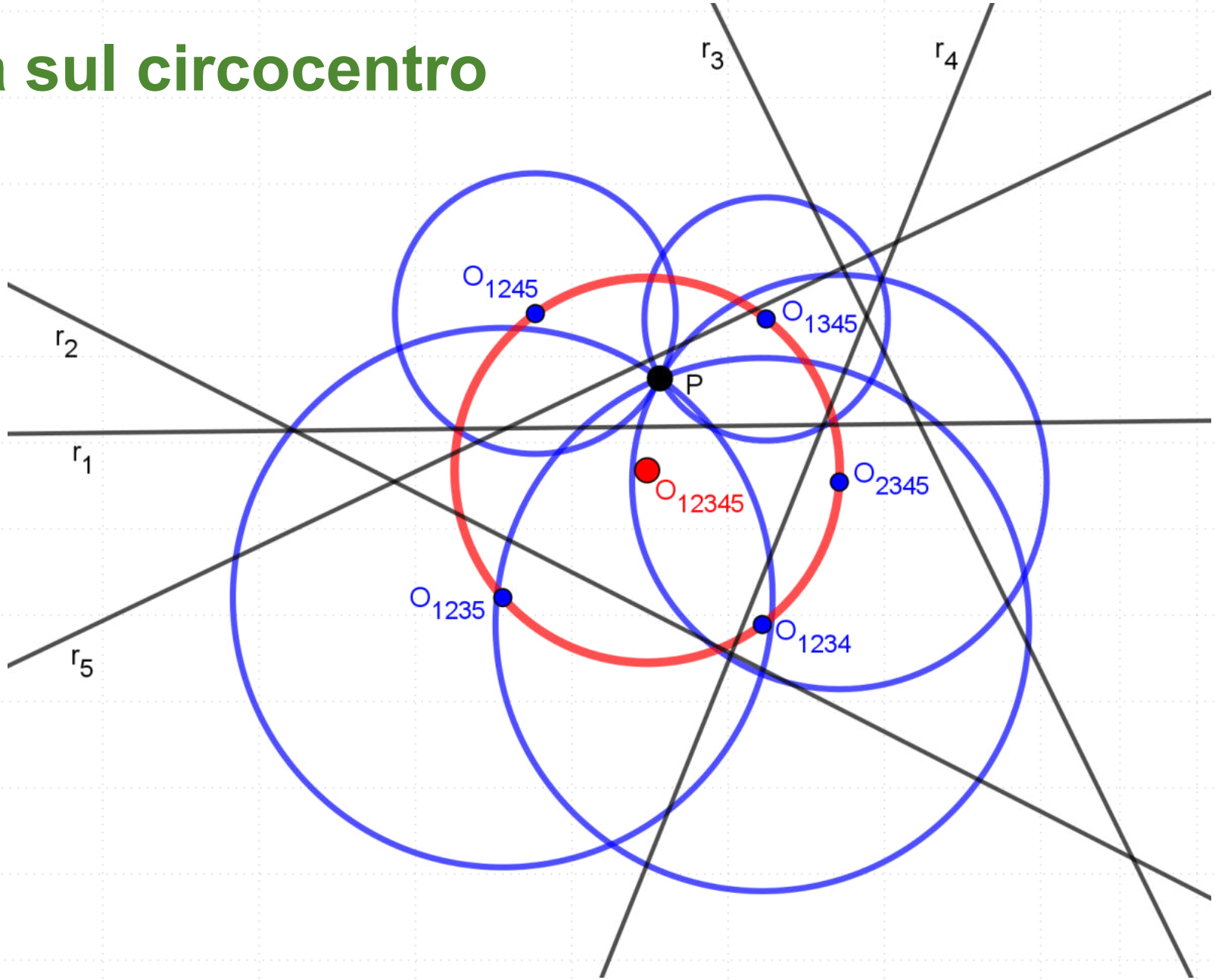
- Cosa accade quando s'incrementa ancora di una unità il numero di rette della configurazione di partenza, ovvero passando **da quattro a cinque** rette del piano che si intersecano a due a due?
- Nuova fase esplorativa su GeoGebra e utilizzo della Macro precedentemente costruita.
- Domande stimolo similari alle precedenti.
- Riflessione sulle differenze tra le due configurazioni.

Il passo della catena sul circocentro

Si ottengono cinque insiemi di quattro rette ciascuno, quindi per il passo precedente, cinque circonferenze.

Tali circonferenze si intersecano tutte in un punto *P*.

I centri delle cinque circonferenze, O_{1234}, O_{1234}, O_{1245}, O_{1345} e O_{2345} stanno tutti su una stessa circonferenza.



Link: https://www.geogebra.org/m/emfdpsgz

Attività 6

- Aumentare ancora di un'unità il numero di rette, ovvero da **cinque a sei** rette nel piano che si intersecano a due a due.
- Nuova fase di esplorazione su GeoGebra e utilizzo della Macro definita per la configurazione di 5 rette.
- Applicando ripetutamente lo stesso ragionamento gli alunni hanno potuto constatare la generalizzazione della catena.

Generalizzando, prese *n* rette nel piano, 1, 2, 3, ..., *n*, che si intersecano a due a due, escludendone una alla volta si ottengono *n* circonferenze ed i loro centri. Tali circonferenze si intersecano tutte in uno stesso punto *P* e i loro centri appartengono tutti ad una stessa circonferenza.

Riflessioni conclusive sul percorso

- Gli alunni hanno affrontato lo studio della geometria piana secondo una differente prospettiva: da semplici osservatori sono divenuti i protagonisti delle attività.
- Reiterando l'utilizzo delle Macro definite in piena autonomia, hanno rivolto l'attenzione alle configurazioni con un maggior numero di rette, facendo propria la nozione di generalizzazione.
- Ripetere lo stesso procedimento nelle costruzioni delle varie configurazioni ha permesso loro di assimilare gli argomenti di base della geometria euclidea affrontati.
- Abbiamo notato un miglioramento delle capacità argomentative degli alunni e un cambio di atteggiamento in positivo nei confronti della materia.

I proposta di percorso laboratoriale: La catena di Clifford

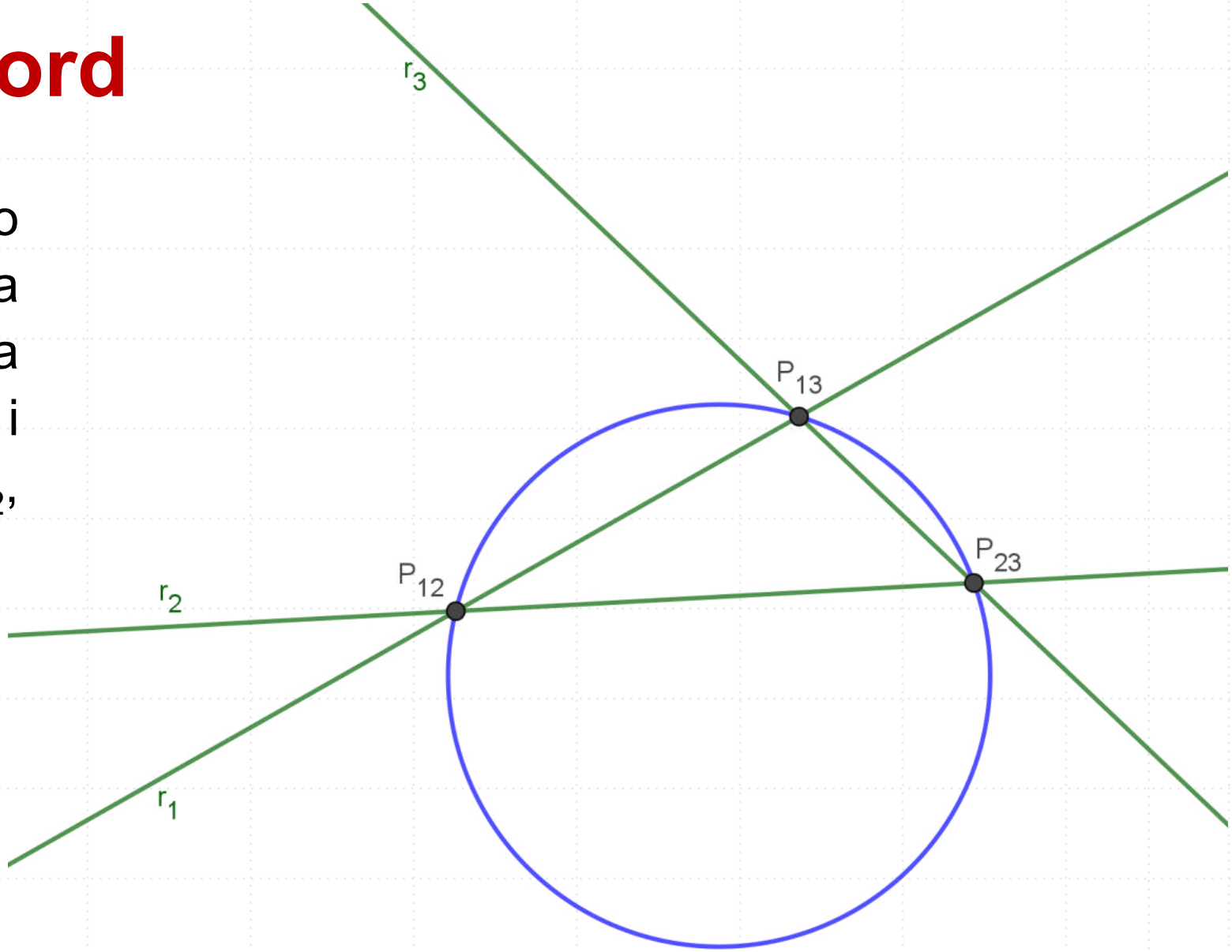
Negli stessi anni in cui de Longchamps sviluppa la sua catena sul circocentro, William Kingdon Clifford presenta una serie di teoremi che dipendono l'uno dall'altro in modo iterativo e dunque costituiscono un esempio di geometria ricorrente.
Anche egli usa come punto di partenza la prima questione di Steiner ma il suo lavoro è totalmente indipendente da quelli del matematico francese.

- *A synthetic proof of Miquel's theorem*, 1871.

La catena di Clifford

Assegnate **tre** rette nel piano che si intersecano a due a due, r_1, r_2 e r_3, esiste una circonferenza passante per i tre punti di intersezione P_{12}, P_{13} e P_{23}.

Proposizione 5 del Libro IV degli Elementi di Euclide

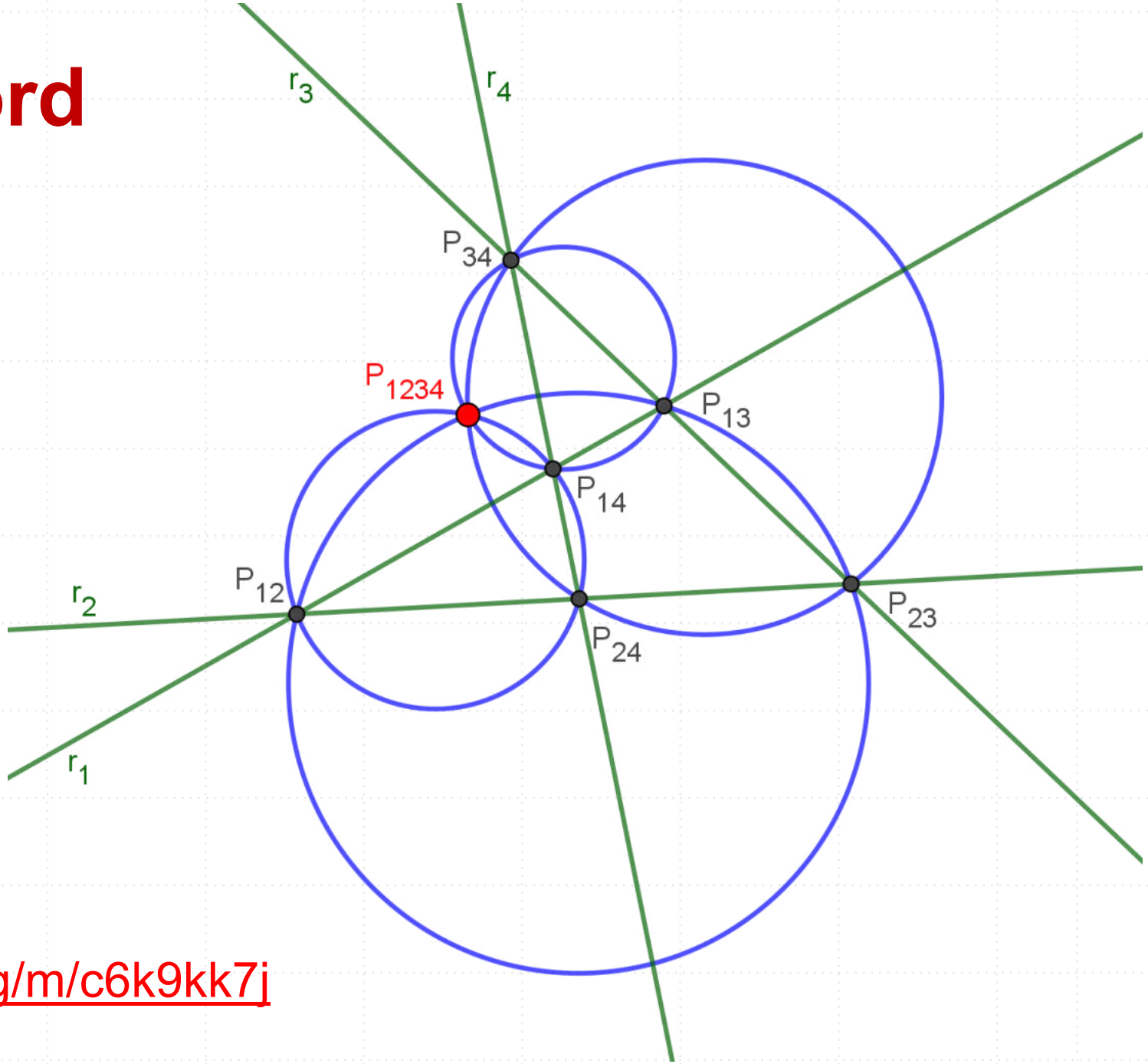


Link: https://www.geogebra.org/m/pqzkuxhu

La catena di Clifford

Assegnate **quattro** rette nel piano che si intersecano a due a due, r_1, r_2, r_3 e r_4, le quattro circonferenze determinate dal passo precedente si incontrano in un punto P_{1234}.

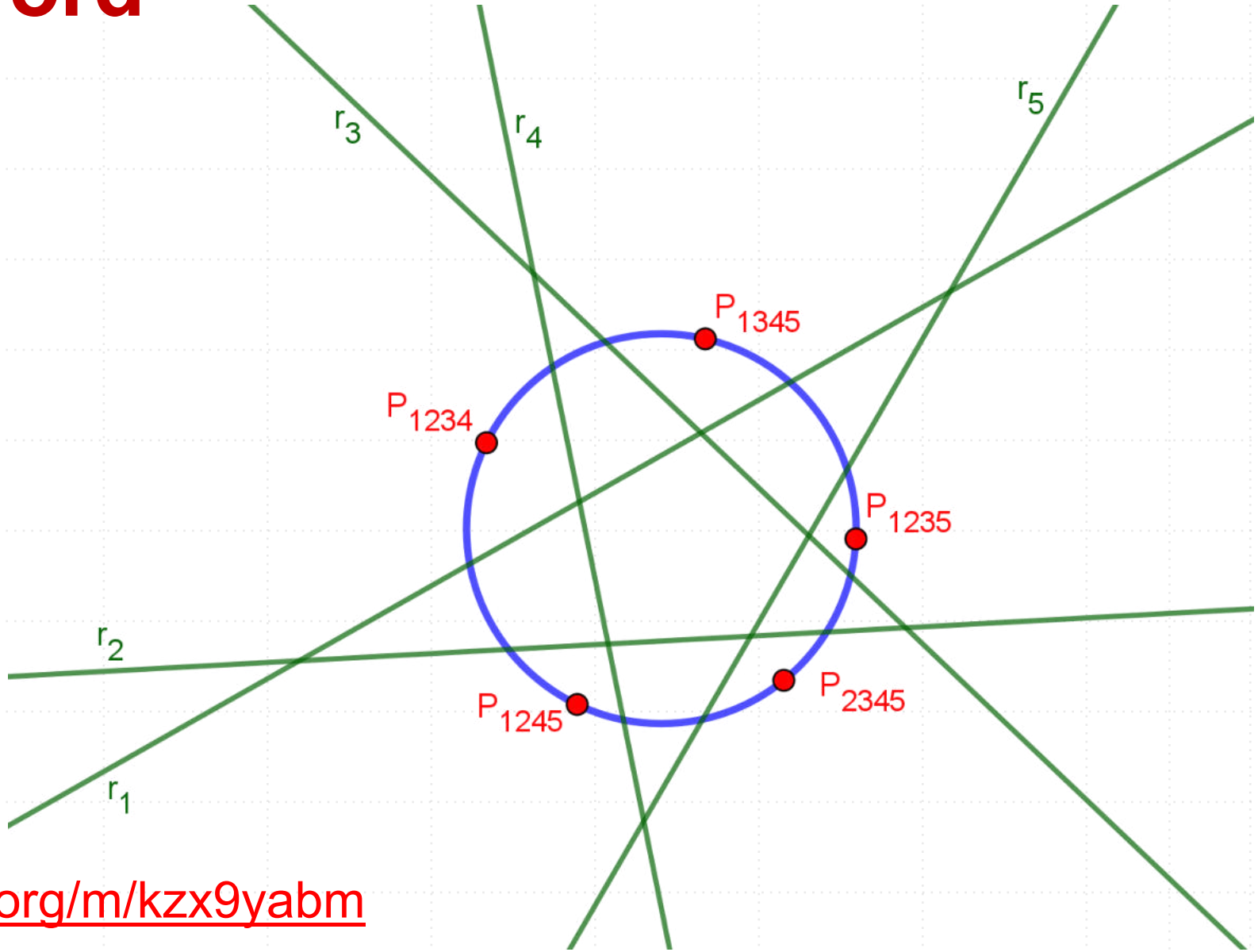
I questione di Steiner



Link: https://www.geogebra.org/m/c6k9kk7j

La catena di Clifford

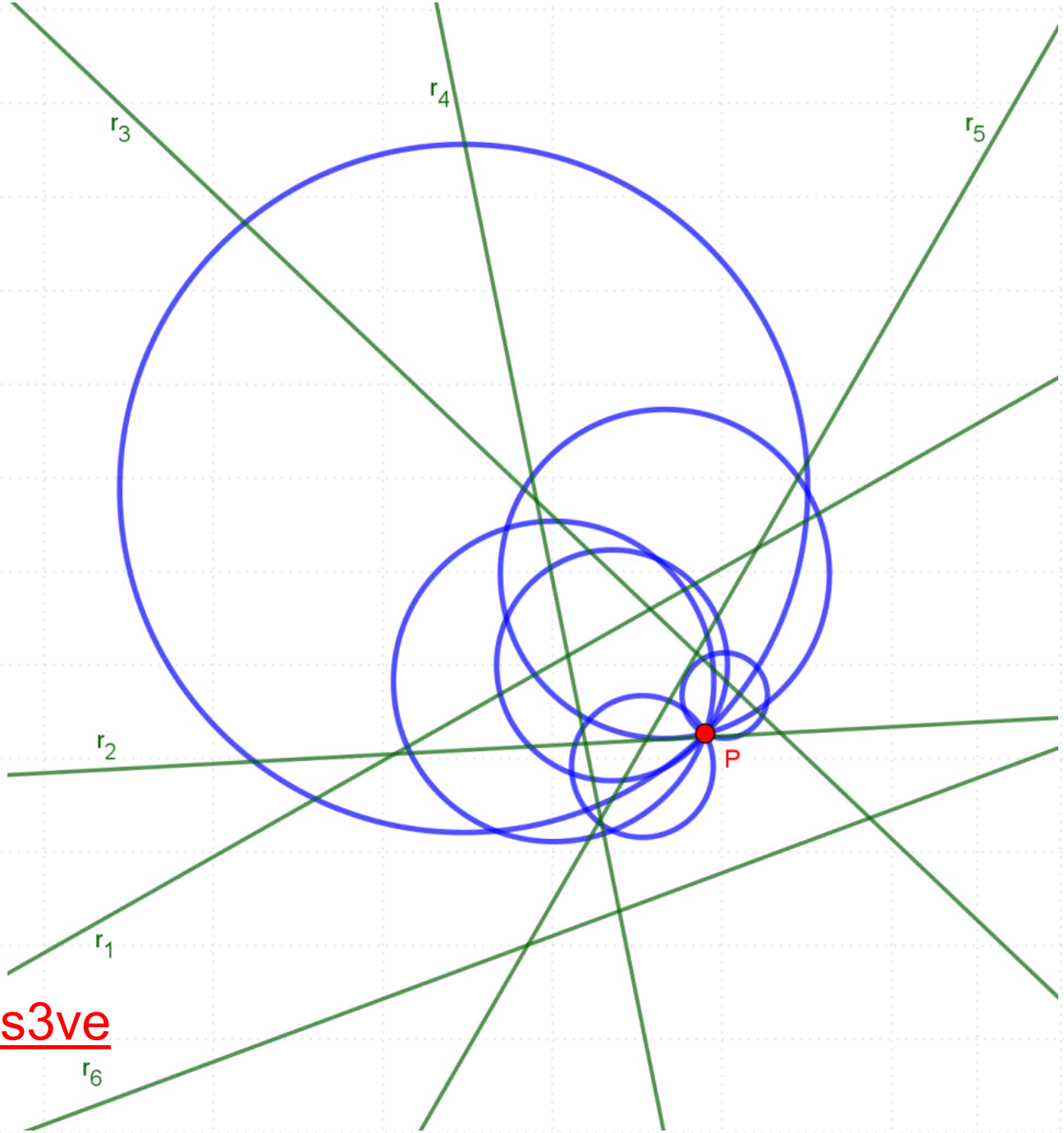
Assegnate **cinque** rette nel piano che si intersecano a due a due, r_1, r_2, r_3, r_4 e r_5, i cinque punti determinati dal passo precedente, P_{1234}, P_{1235}, P_{1245}, P_{1345} e P_{2345}, appartengono tutti ad una stessa circonferenza.



Link: https://www.geogebra.org/m/kzx9yabm

La catena di Clifford

Assegnate **sei** rette nel piano che si intersecano a due a due, le sei circonferenze determinate dal passo precedente si incontrano in un punto.



Link: https://www.geogebra.org/m/tfhvs3ve

La catena di Clifford

La serie di teoremi di Clifford si può estendere indefinitamente:

- $2n + 1$ rette del piano che si intersecano a due a due determinano $2n + 1$ punti che appartengono ad una stessa circonferenza;
- $2n + 2$ rette del piano che si intersecano a due a due determinano $2n + 2$ circonferenze che si incontrano in un punto.

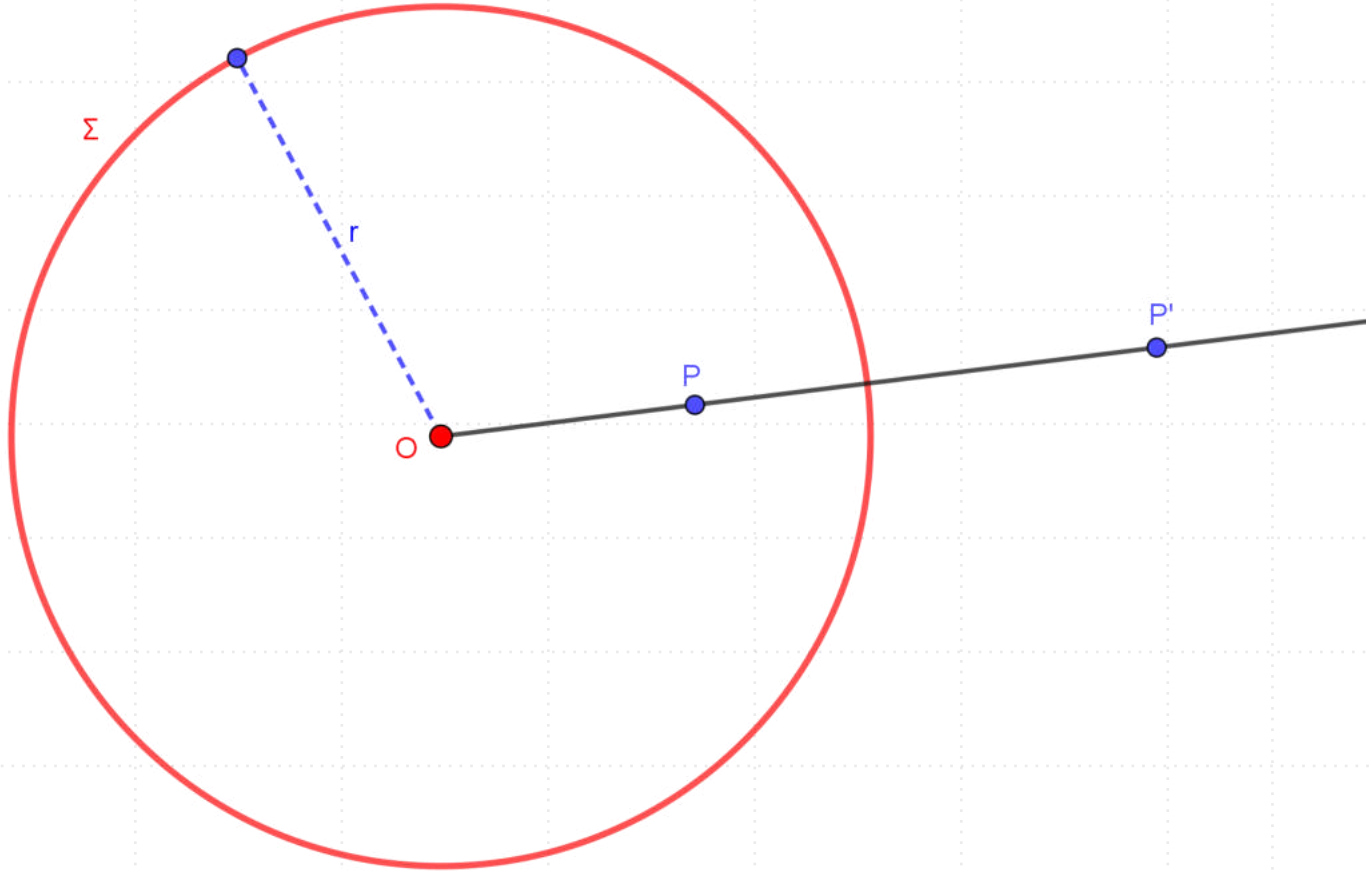
Nel 1898 John Hilton Grace presenta una dimostrazione della catena di Clifford applicando un'inversione circolare rispetto ad una circonferenza del piano su cui giacciono le rette di partenza.

Inversione circolare

Sia Σ una circonferenza di centro O e raggio r. L'inverso P' di un punto P rispetto alla circonferenza Σ è il punto sulla semiretta uscente da O e passante per P che soddisfa la relazione $OP \cdot OP' = r^2$.

Il centro O della circonferenza si dice *centro di inversione* e viene trasformato nel punto all'infinito.

I punti della circonferenza vengono trasformati in sé stessi.



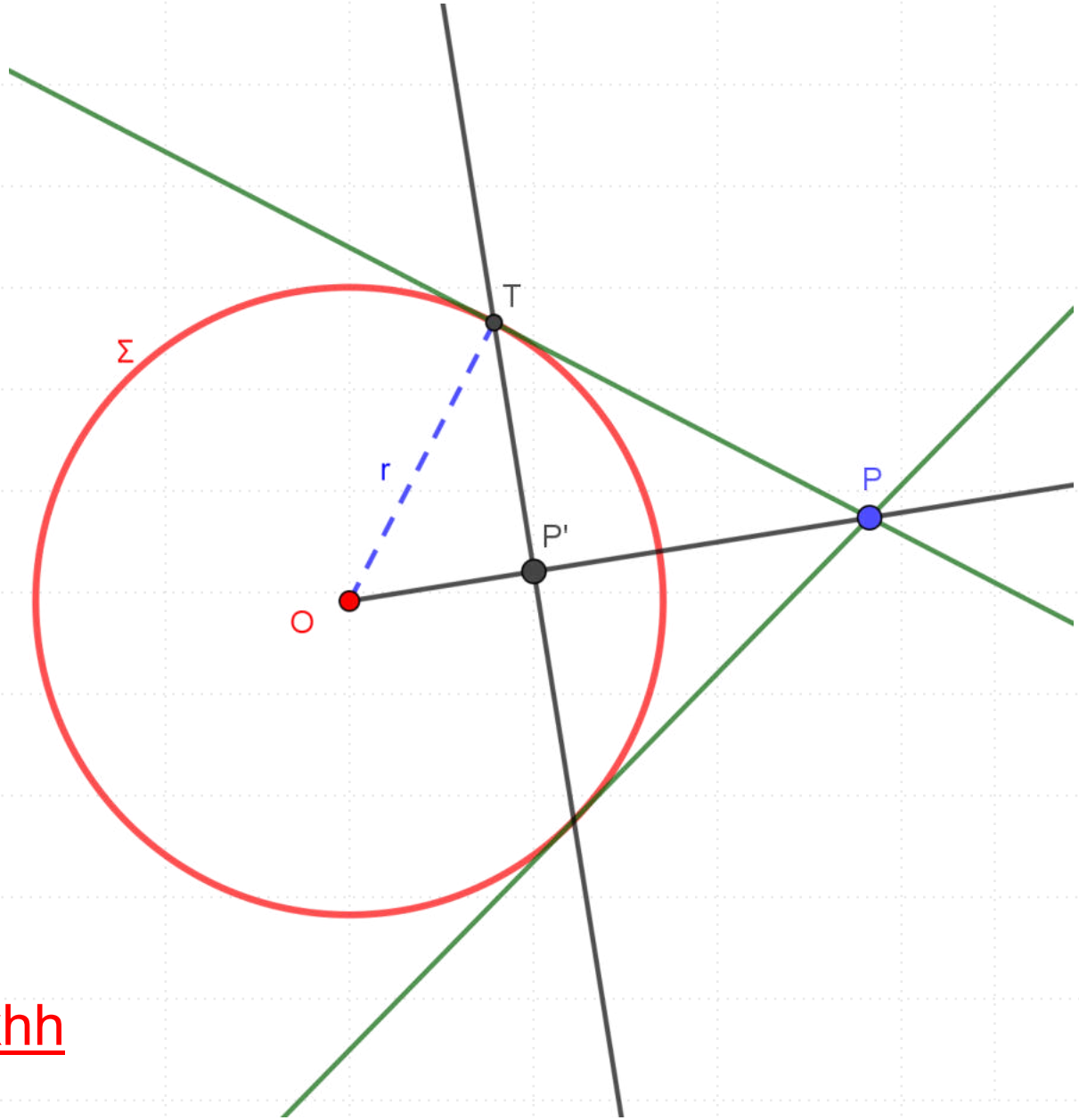
Inversione circolare: costruzione

I Caso: ***P* esterno a Σ**

- Tracciare le tangenti a Σ condotte da *P*;
- Sia *T* uno dei punti di tangenza;
- *P′* è la proiezione di *T* sulla semiretta *OP*.

Infatti, *PTO* è un triangolo rettangolo e per il I teorema di Euclide si ha che $OP \cdot OP' = OT^2$ $(= r^2)$.

Link: https://www.geogebra.org/m/c7yd7xhh

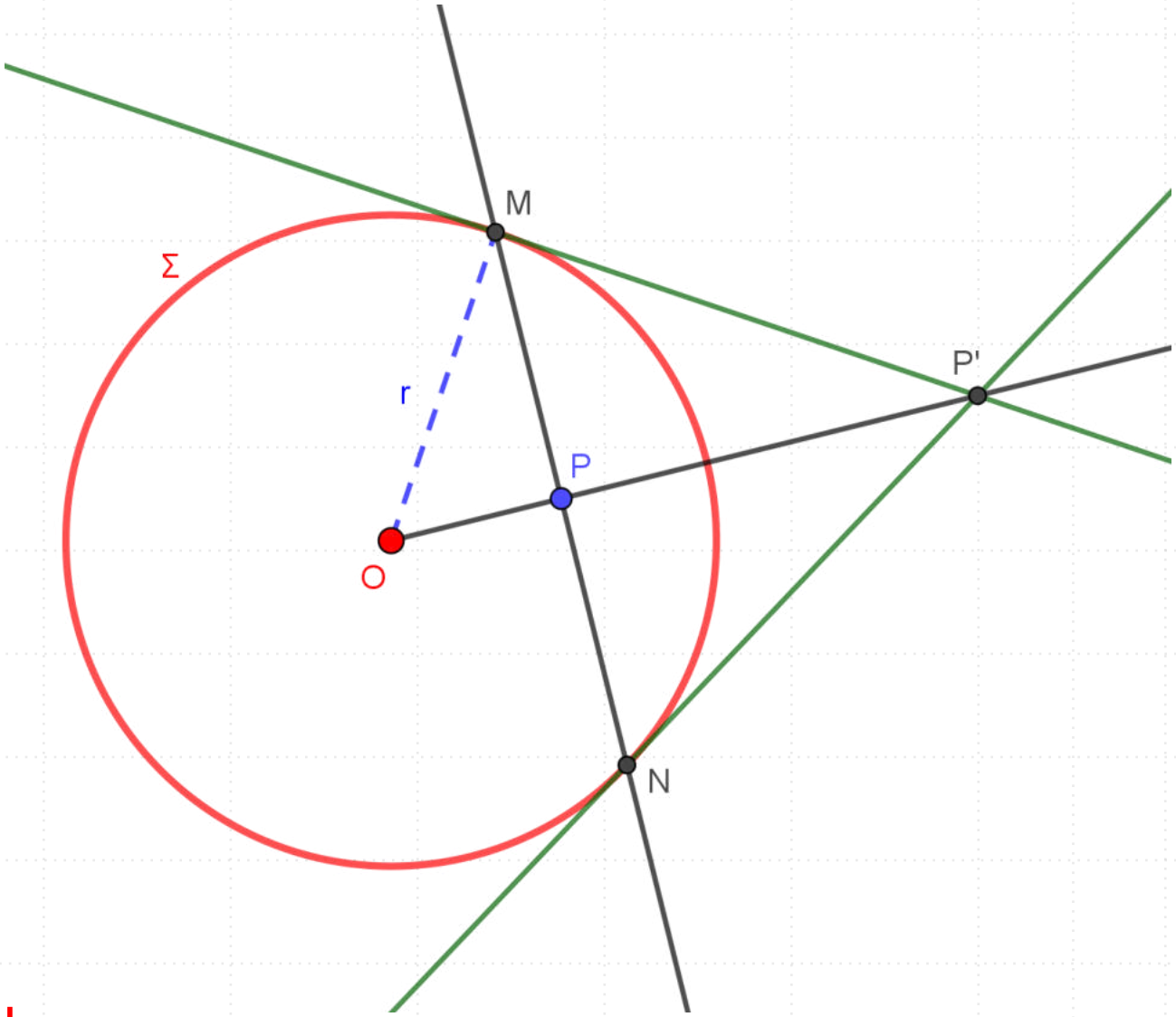


Inversione circolare: costruzione

II Caso: ***P* interno a Σ**

- Tracciare la semiretta OP e la retta ad essa perpendicolare passante per P;
- Siano M e N i punti di intersezione tra la perpendicolare e Σ;
- P' è l'intersezione tra le due tangenti a Σ condotte da M e N.

Infatti, $P'MO$ è un triangolo rettangolo e per il I teorema di Euclide si ha che $OP' \cdot OP = OM^2$ $(= r^2)$.

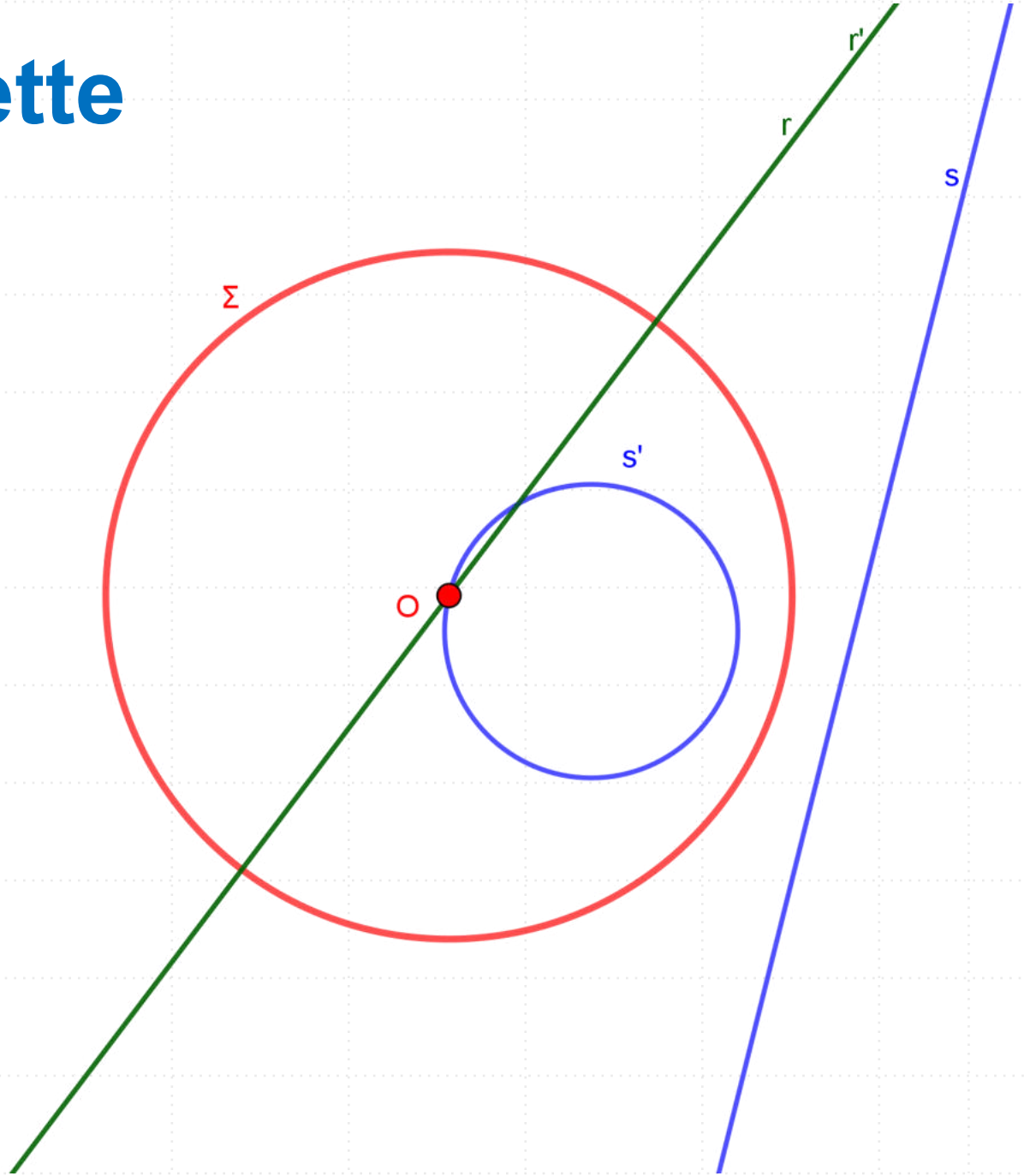


Link: https://www.geogebra.org/m/jfqkjdrq

Inversione circolare: rette

Una retta passante per il centro d'inversione *O* viene trasformata in se stessa.

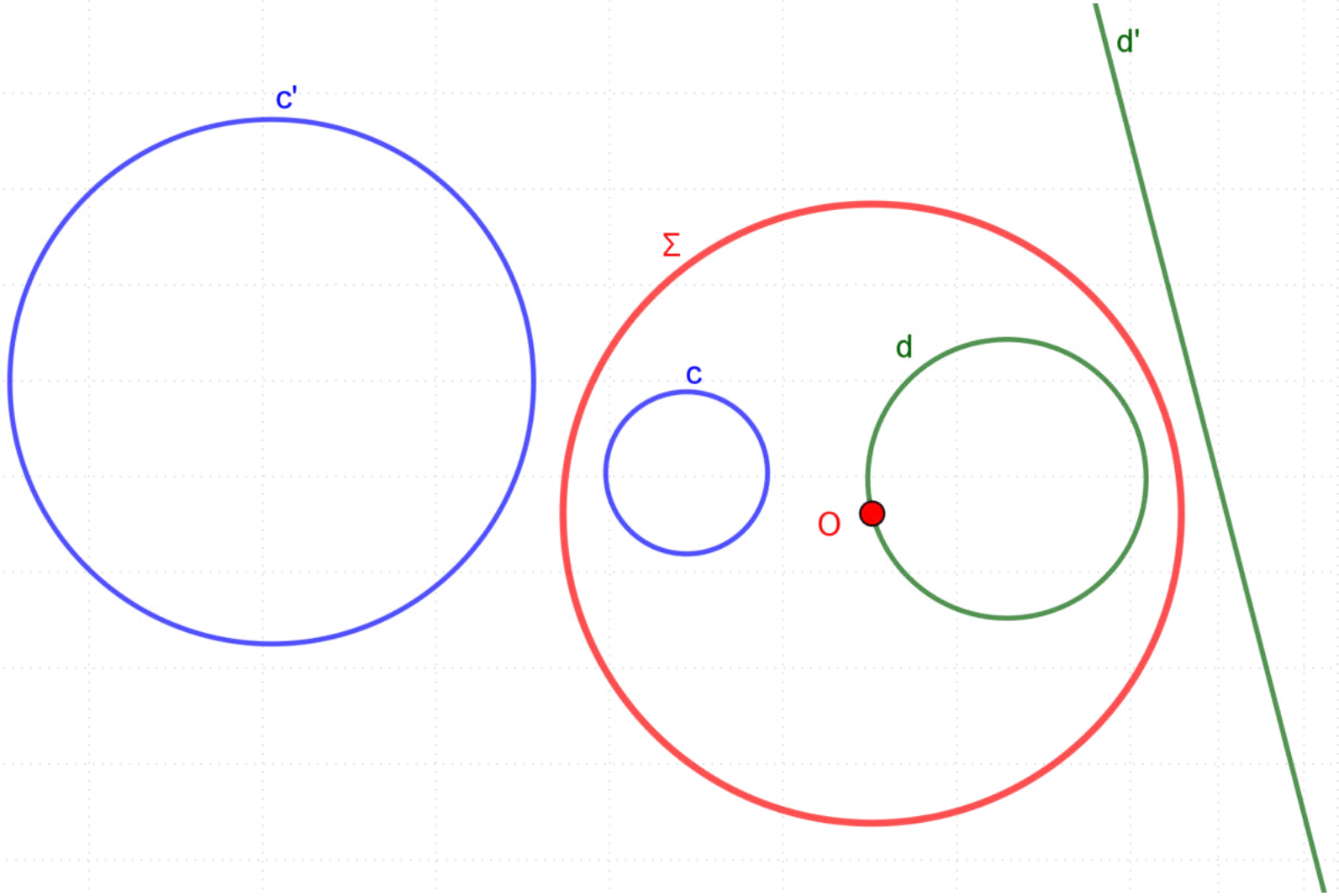
Una retta che non passa per il centro di inversione *O* viene trasformata in una circonferenza che passa per *O*.



Inversione circolare: circonferenze

Una circonferenza passante per il centro d'inversione *O* viene trasformata in una retta non passante per *O*.

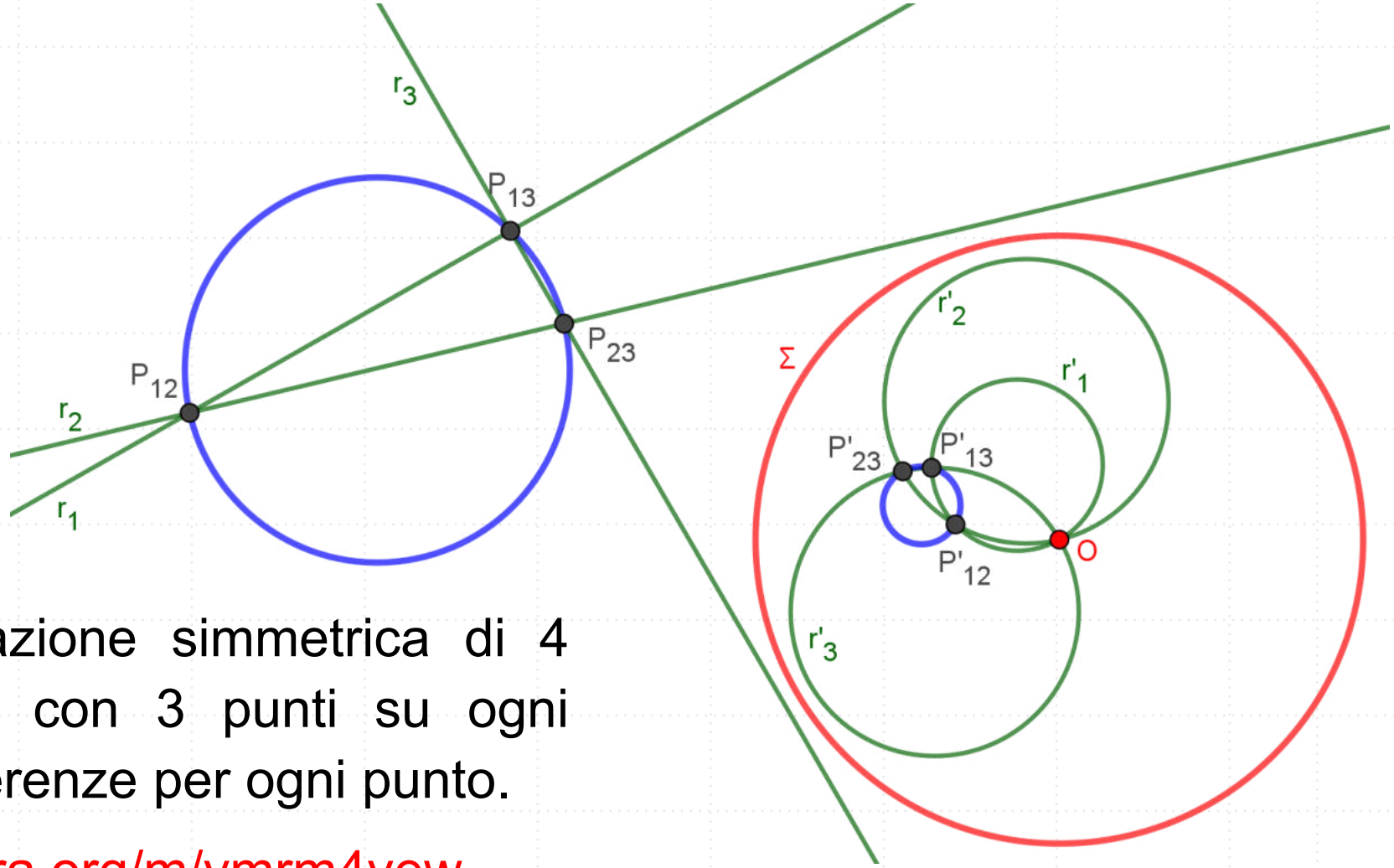
Una circonferenza che non passa per il centro di inversione *O* viene trasformata in una circonferenza che non passa per *O*.



La catena di Clifford sotto inversione circolare: CL3

3 rette determinano 3 punti che appartengono ad una stessa circonferenza.

Applicando un'inversione circolare rispetto ad una circonferenza del piano di centro O le 3 rette vengono trasformate in 3 circonferenze passanti per O.



Si ottiene una configurazione simmetrica di 4 punti e 4 circonferenze con 3 punti su ogni circonferenza e 3 circonferenze per ogni punto.

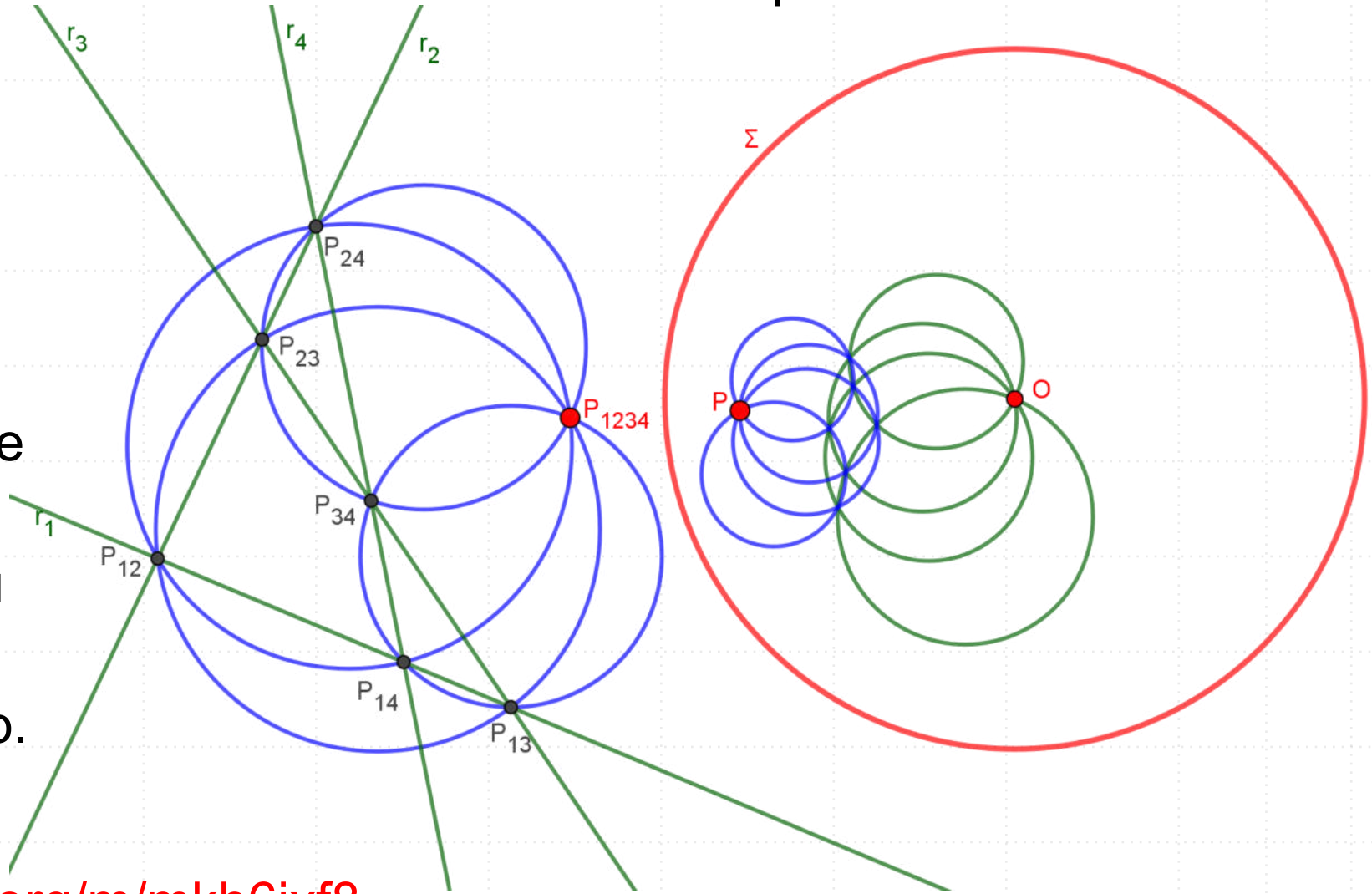
Link: https://www.geogebra.org/m/ymrm4vew

La catena di Clifford sotto inversione circolare: CL4

4 rette determinano 4 circonferenze che si intersecano in un punto.

Le 4 rette vengono trasformate in 4 circonferenze passanti per O.

Si ottiene una configurazione simmetrica di 8 punti e 8 circonferenze con 4 punti su ogni circonferenza e 4 circonferenze per ogni punto.



Link: https://www.geogebra.org/m/mkh6jxf8

Inversione circolare

Applicando un'inversione circolare rispetto ad una circonferenza del piano le configurazioni di Clifford assumono un aspetto più simmetrico, infatti date m ($m \geq 3$) circonferenze che passano per uno stesso punto (le inverse di m rette di partenza) si ottiene una configurazione completa (CLm) di 2^{m-1} punti e 2^{m-1} circonferenze con m punti su ogni circonferenza ed m circonferenze che passano per ogni punto.

$m = 3$	4 punti e 4 circonferenze con 3 punti su ogni circonferenza e 3 circonferenze per ogni punto
$m = 4$	8 punti e 8 circonferenze con 4 punti su ogni circonferenza e 4 circonferenze per ogni punto

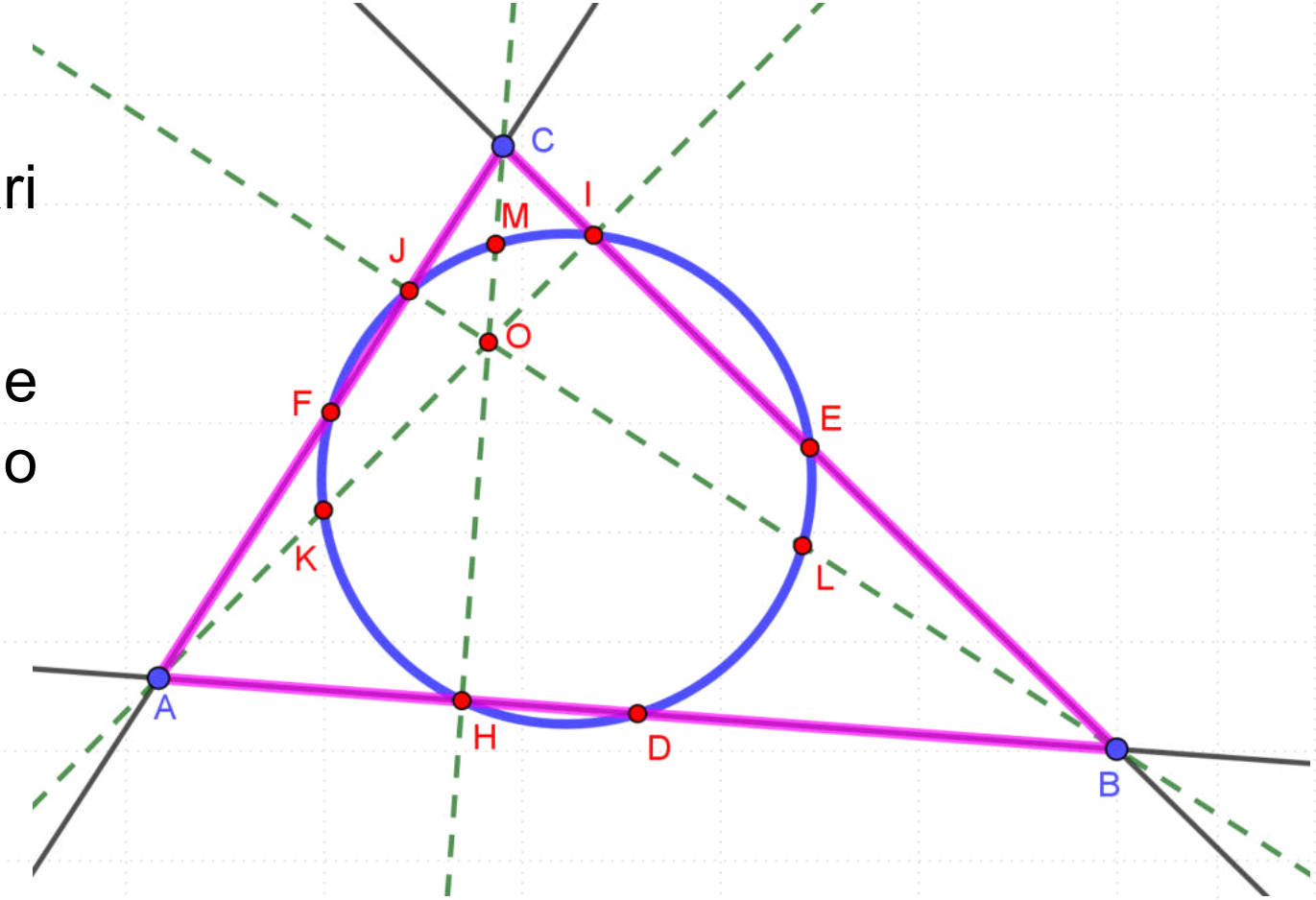
II proposta di percorso laboratoriale: La catena di de Longchamps associata al cerchio dei nove punti

- Destinatari: terza/quarta classe del liceo scientifico.
- Prerequisiti: Rette parallele e rette incidenti, punto medio di un segmento, punti notevoli del triangolo, circonferenza per tre punti, congruenza di angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, teorema della corda, omotetie.

Il cerchio dei 9 punti

Dato un triangolo di vertici *A*, *B* e *C*, il cerchio dei nove punti associato ad esso passa per nove punti caratteristici del triangolo:

- i tre punti medi dei lati (*D*, *E*, *F*),
- i tre piedi delle perpendicolari condotte dai vertici (*H*, *I*, *J*),
- i tre punti medi dei segmenti che congiungono i vertici del triangolo con l'ortocentro *O* (*K*, *L*, *M*).



Macro

Oggetti iniziali: *A*, *B*, *C*.

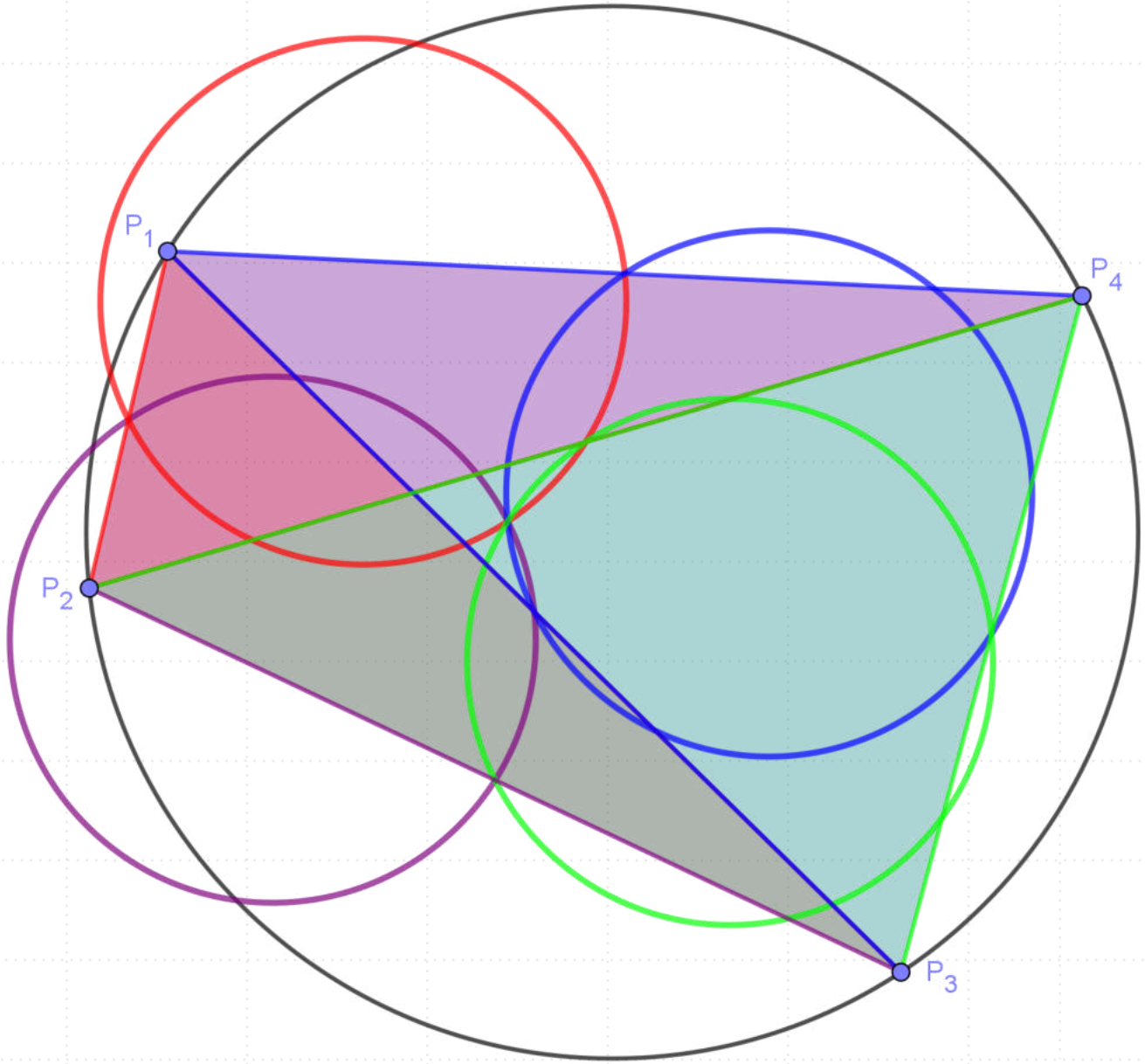
Oggetti finali: il cerchio dei 9 punti.

Link: https://www.geogebra.org/m/enm5aneu

I passo della catena sul cerchio dei nove punti

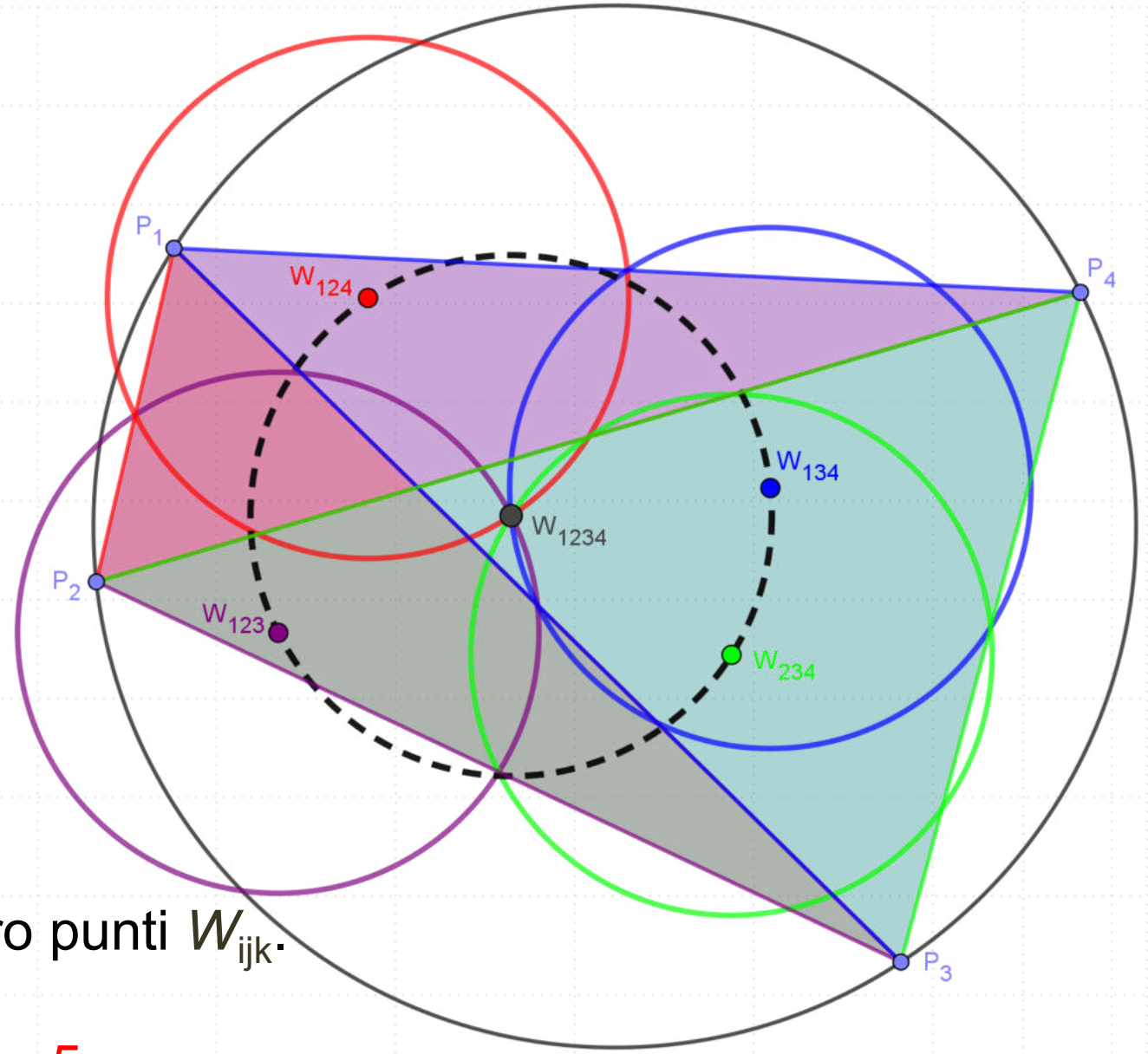
Presi quattro punti su una circonferenza, P_1, P_2, P_3 e P_4, si conducono gli alunni a considerare i quattro punti in gruppi da tre escludendo un punto alla volta, in modo tale da far entrare in gioco il processo ricorsivo.

Si ottengono quattro triangoli e quindi quattro cerchi dei nove punti ad essi associati.



I passo della catena sul cerchio dei nove punti

Denotato con W_{ijk} il centro del cerchio dei nove punti relativo al triangolo di vertici P_i, P_j e P_k, i quattro punti così ottenuti, W_{123}, W_{124}, W_{134} e W_{234}, appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro, W_{1234}, è il punto di intersezione dei quattro cerchi dei nove punti.



Macro

Oggetti iniziali: P_1, P_2, P_3 e P_4.

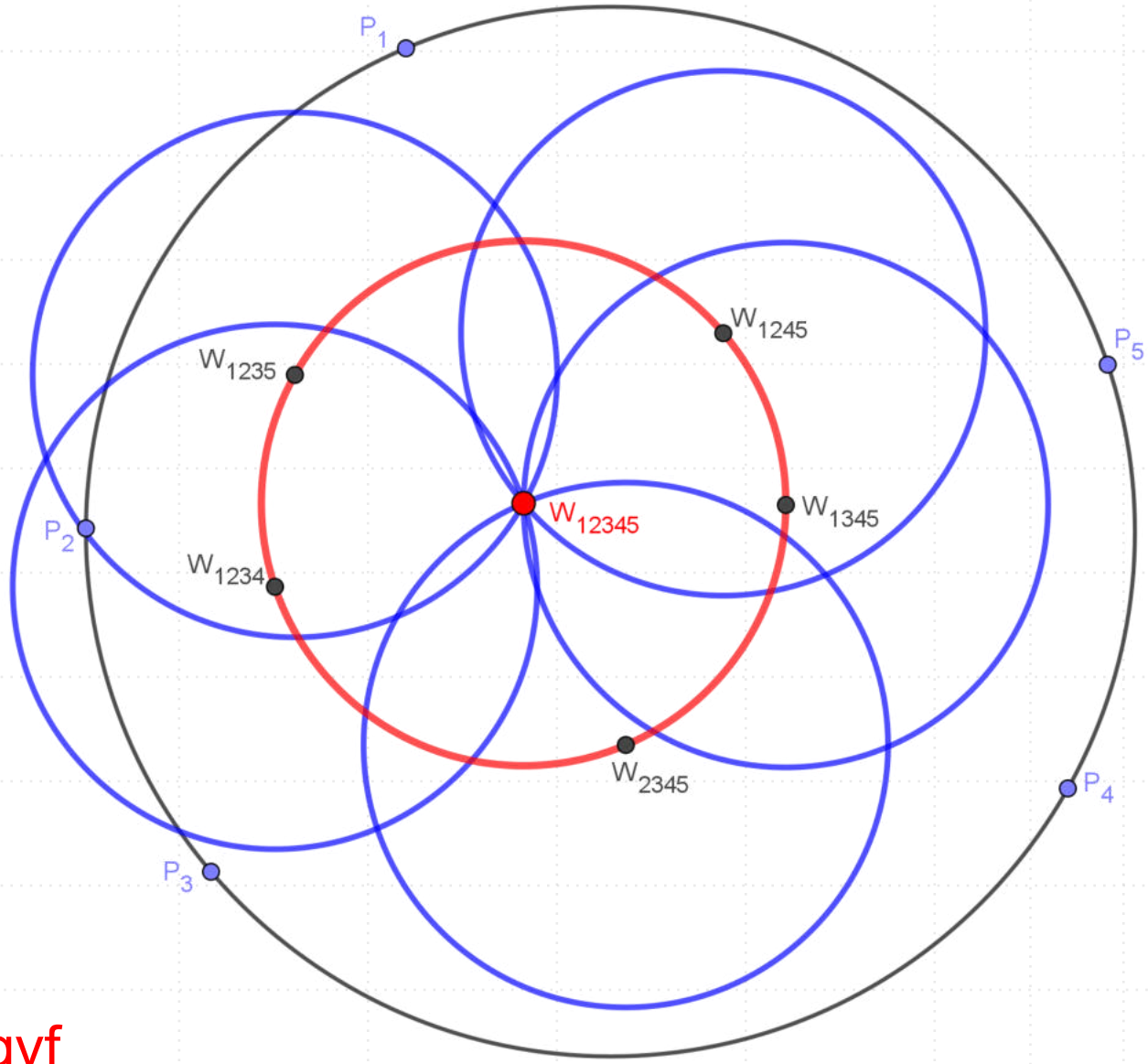
Oggetti finali: la circonferenza per i quattro punti W_{ijk}.

Link: https://www.geogebra.org/m/g62erbn5

Il passo della catena sul cerchio dei nove punti

Presi cinque punti su una circonferenza, P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5, escludendo un punto alla volta si ottengono cinque insiemi di quattro punti ciascuno, ovvero, per il passo precedente, cinque circonferenze ed i loro centri denominati W_{1234}, W_{1234}, W_{1245}, W_{1345} e W_{2345}.

Tali punti appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro, W_{12345}, è il punto di intersezione delle cinque circonferenze ottenute.



Link: https://www.geogebra.org/m/uzxqhgvf

La catena sul cerchio dei nove punti

Generalizzando, presi *n* punti su una circonferenza, 1, 2, 3, ..., *n*, escludendone uno alla volta si ottengono *n* circonferenze ed i loro centri. Tali centri appartengono tutti ad una stessa circonferenza, il cui centro, $W_{12345...n}$, è proprio il punto di intersezione delle *n* circonferenze.

Dimostrazione di de Longchamps

Consideriamo i triangoli $P_1P_2P_3$ e $P_1P_2P_4$.

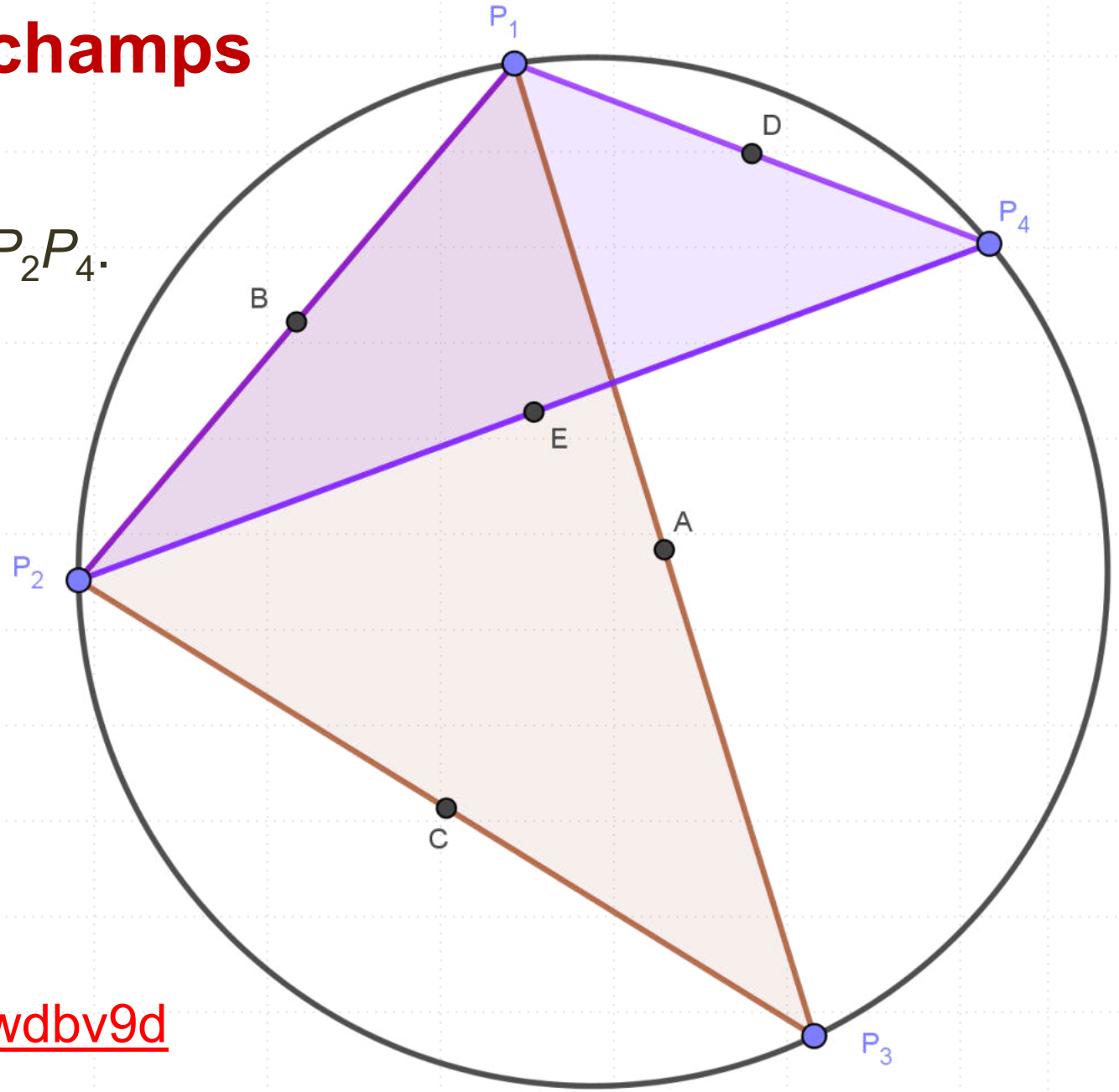
A: punto medio della corda P_1P_3

B: punto medio della corda P_1P_2

C: punto medio della corda P_2P_3

D: punto medio della corda P_1P_4

E: punto medio della corda P_2P_4



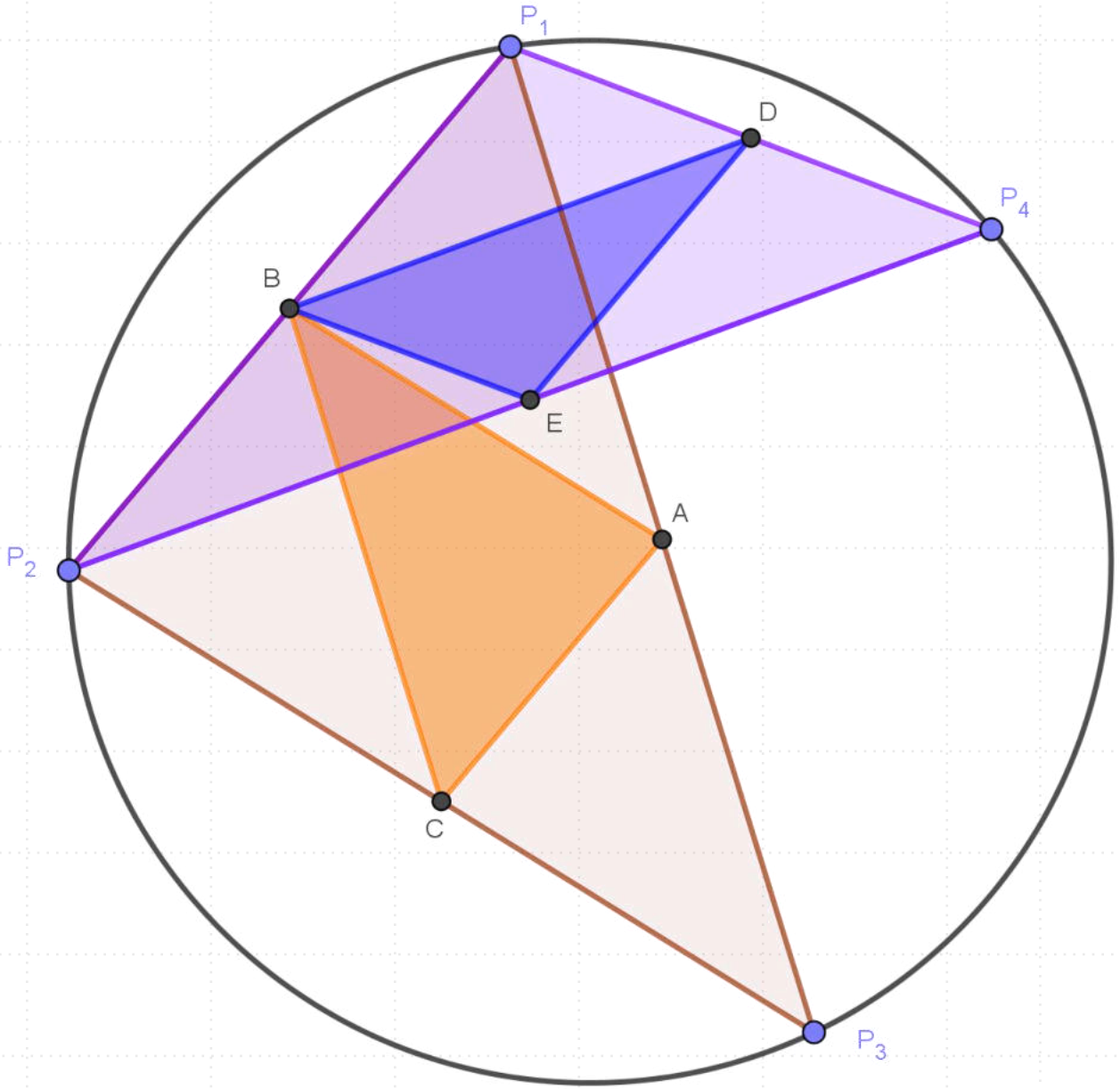
Link: https://www.geogebra.org/m/thwdbv9d

I PASSO

I triangoli ABC e $P_1P_2P_3$ sono omotetici di rapporto 0,5.

I triangoli BDE e $P_1P_2P_4$ sono omotetici di rapporto 0,5.

Conseguenza: $AC \parallel DE$ e $AC = DE$.

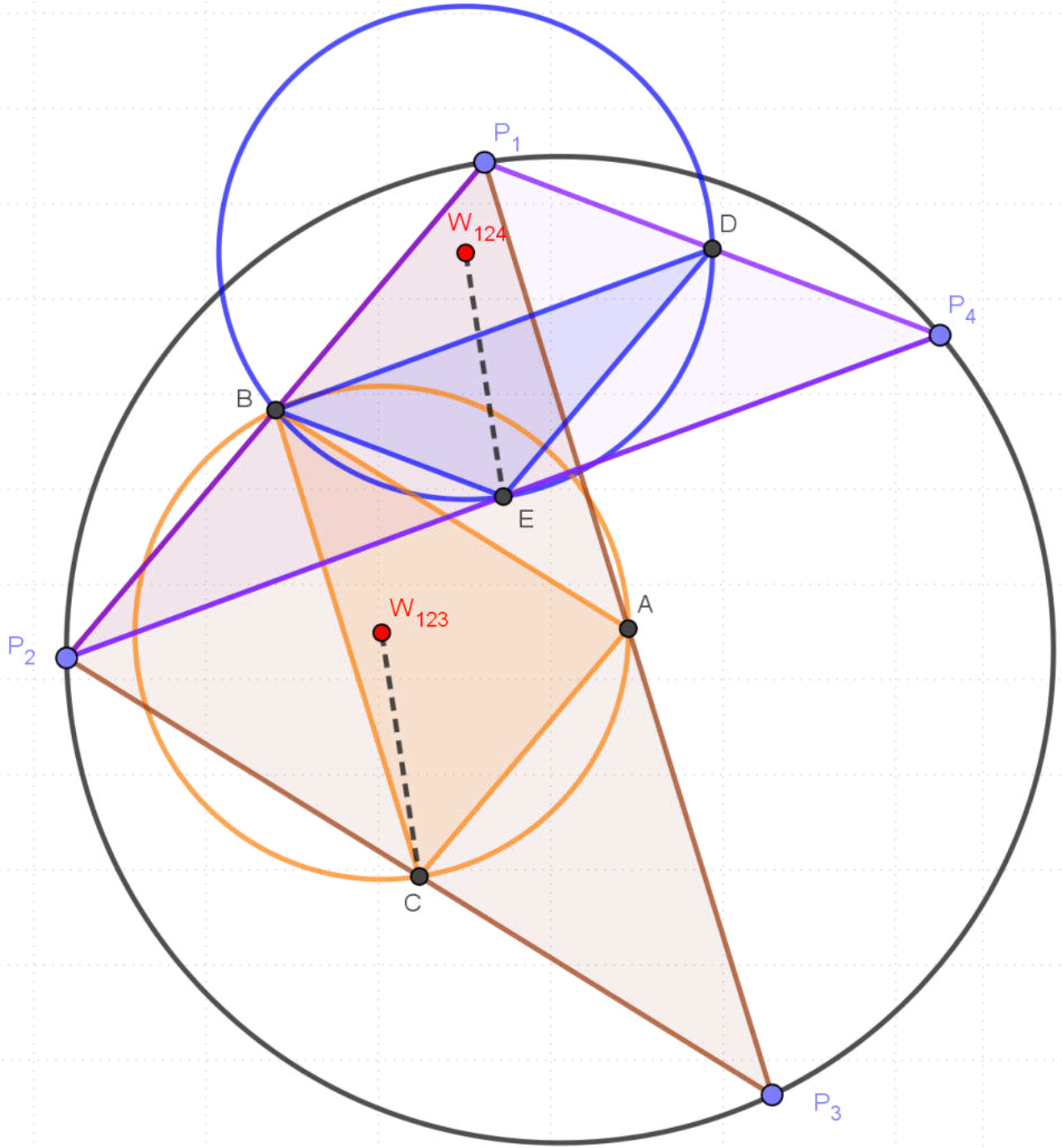


II PASSO

Le circonferenze circoscritte ai triangoli *ABC* e *BDE* sono congruenti.

Si dimostra applicando il teorema della corda rispettivamente alle corde *AC* e *DE* che sono congruenti.

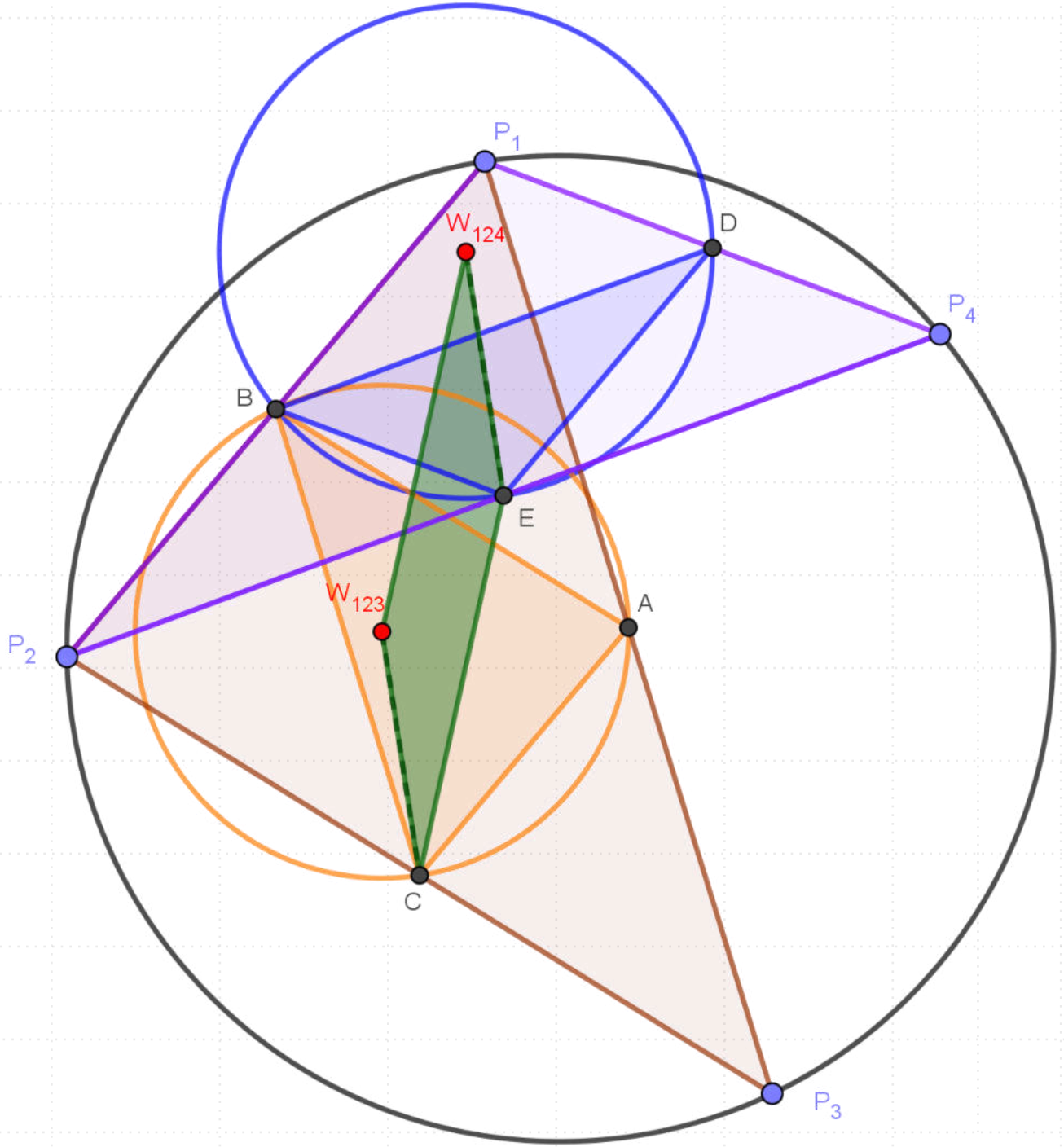
Conseguenza: $W_{123}C \parallel W_{124}E$ e $W_{123}C = W_{124}E$.



III PASSO

Il quadrilatero $W_{123}W_{124}EC$ avendo i due lati opposti $W_{123}C$ e $W_{124}E$ paralleli e congruenti è un parallelogramma.

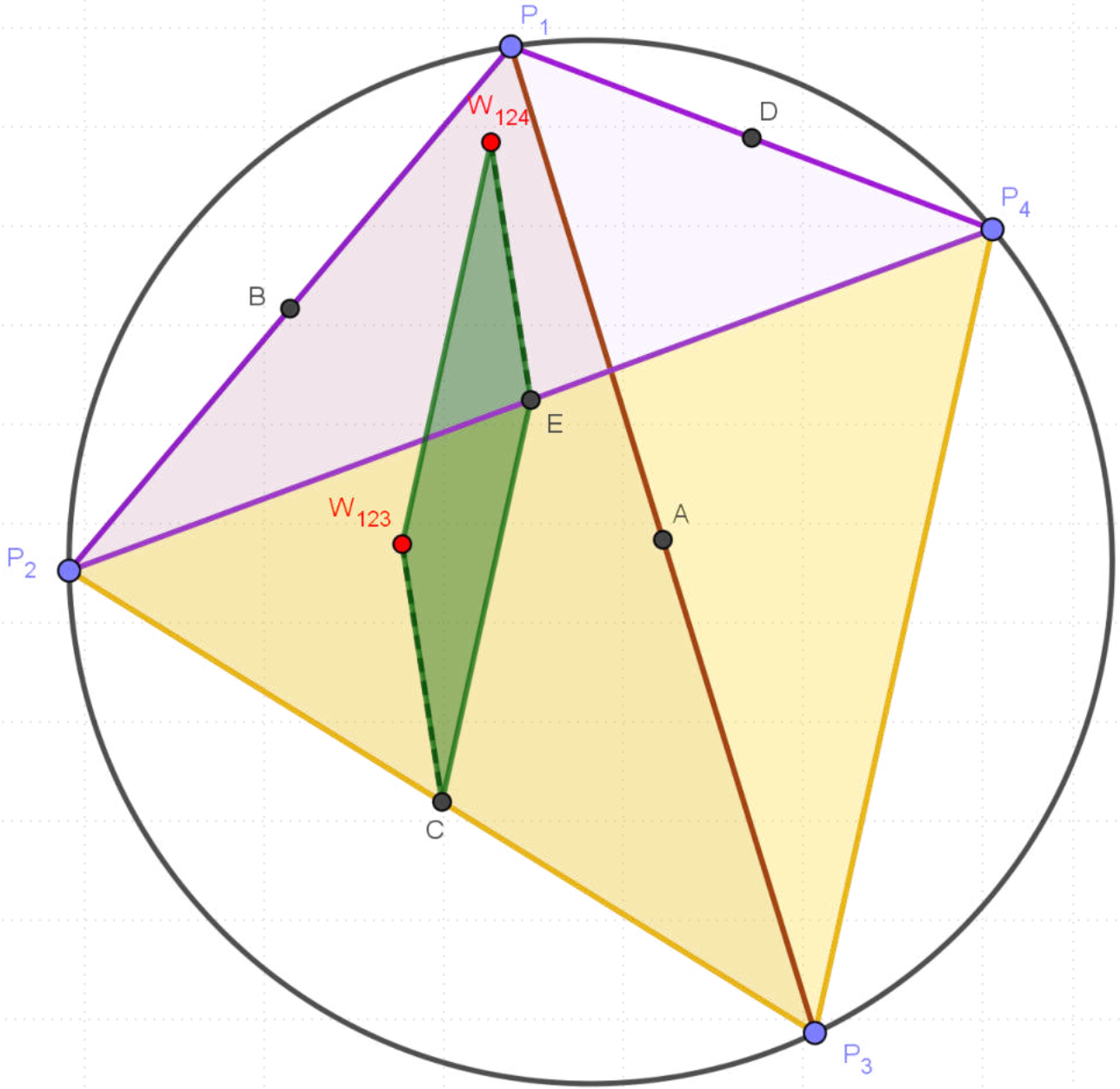
Conseguenza: $W_{123}W_{124}$ // CE e $W_{123}W_{124} = CE$.



IV PASSO

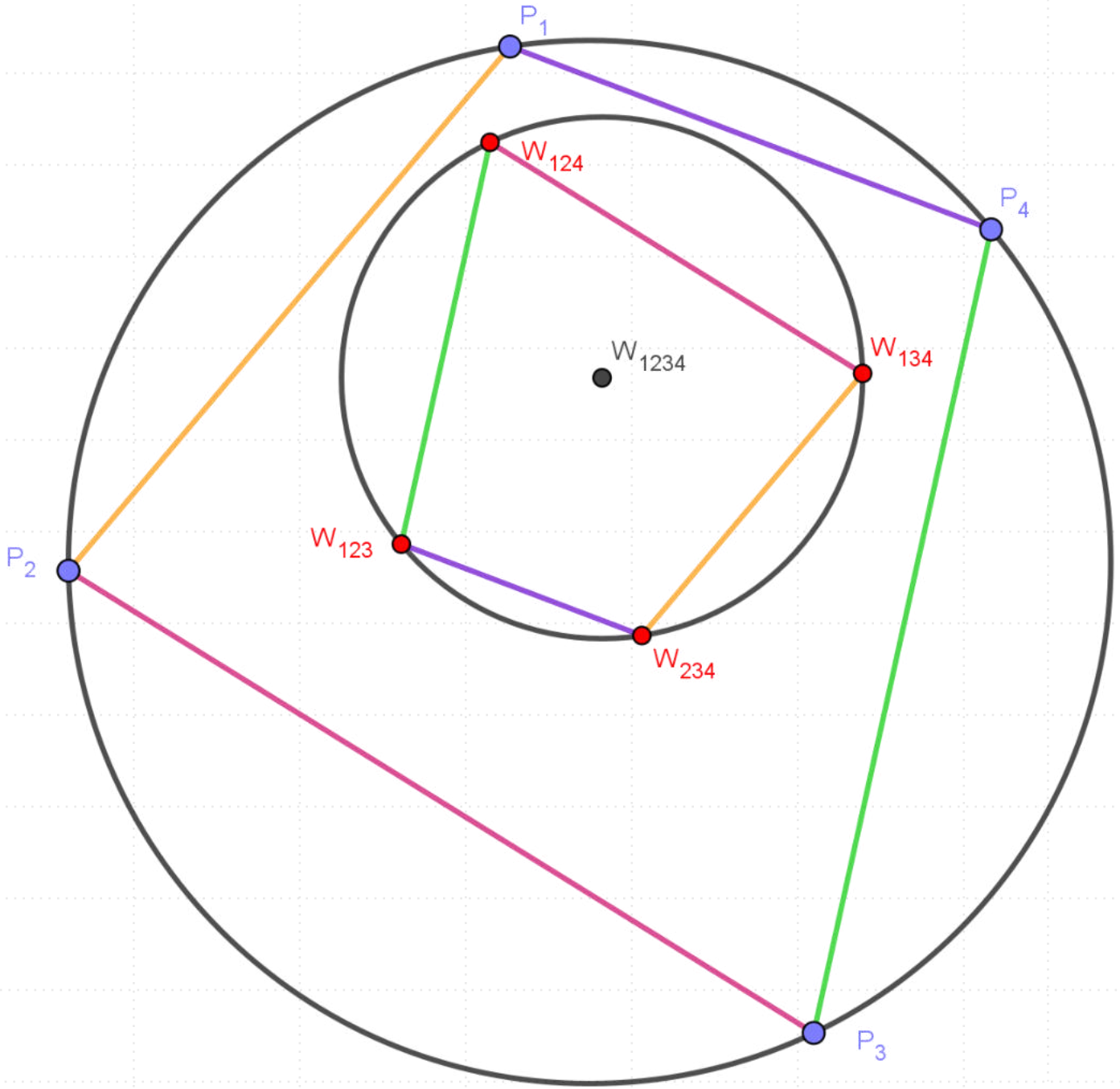
Considerato il triangolo $P_2P_3P_4$ il segmento CE è parallelo alla corda P_3P_4 e ne è la metà, pertanto $W_{123}W_{124}$ // P_3P_4 e $P_3P_4 = 2\ W_{123}W_{124}$.

Analoga dimostrazione per gli altri lati.



V PASSO

$W_{123}W_{234}W_{134}W_{124}$ è omotetico al quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$, ne segue che è inscritto in una circonferenza, il cui centro lo denotiamo con W_{1234}.



Bibliografia

ANICHINI, G., ARZARELLO, F., CIARRAPICO, L., ROBUTTI, O., 2003. *Matematica 2003, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica, Ciclo secondario*. MIUR, UMI, SIS, Mathesis.

BARTOLINI BUSSI, M. G., MARIOTTI, M. A., *Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32, fascicolo 3, pp. 270-294.

CLIFFORD, W. K., 1871. *Synthetic proof of Miquel's theorem*, The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, 5, pp. 121-141, in *Mathematical Papers by William Kingdon Clifford*, Cambridge University Press, 1882, pp. 38-54.

DE LONGCHAMPS, G., 1877. *Note de Géométrie*, Nouvelle Correspondance Mathématique, 3, pp. 306-312, 340-357.

DE LONGCHAMPS, G., 1883. *La Géométrie Récurrente*, Journal de Mathématiques Élémentaires Série II 2, pp. 3-10, 25-33, 49-56, 73-78, 121-126.

GRACE, J. H., 1898. *Circles, spheres and linear complexes*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 16, pp. 153-190.

MARIOTTI, M. A., 2022. *Argomentare e dimostrare come problema didattico*, UTET Università.

ROMERA-LEBRET, P., 2014. *La nouvelle géométrie du triangle à la fin du XIXe siècle: des revues mathématiques intermédiaires aux ouvrages d'enseignement*, Revue d'histoire des mathématiques, 20, pp. 253-302.

PICKERING, G., 1806. *First Solution, by Mr. George Pickering*, Leybourn's Mathematical Repository new series, 1, p.170.

STEINER, J., 1827-1828. *Questions proposées. Théorème sur le quadrilatère complet*, Annales de Mathématiques pures et appliquées, 18, pp. 302-304.