SISM – Ciclo di seminari di Storia della Matematica

26 Febbraio 2025

Questioni di combinatoria

Maria Anna Raspanti

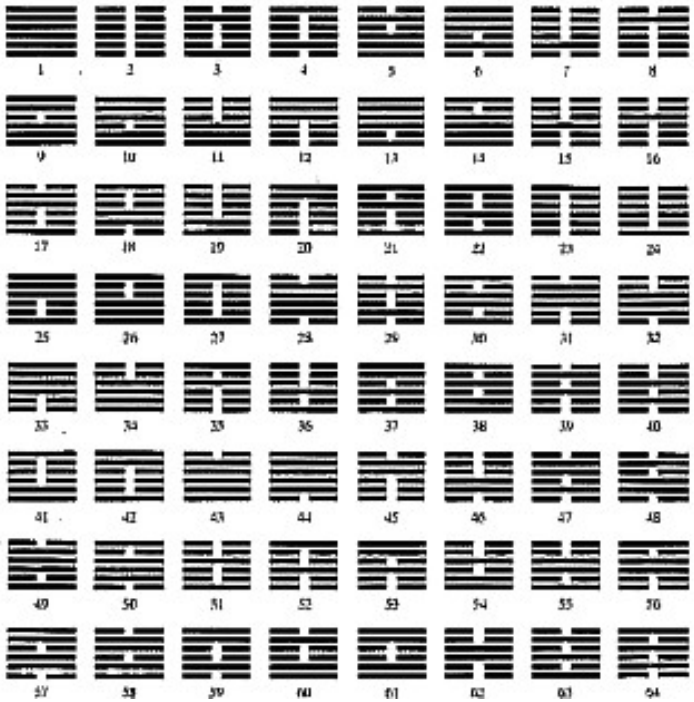
Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo', Università di Roma "La Sapienza"

Liceo scientifico "Albert Einstein" di Palermo

La combinatoria è il settore della matematica che studia insiemi finiti di oggetti semplici (interi, stringhe, nodi e collegamenti, punti e linee, configurazioni discrete, insiemi finiti, ...) che soddisfano proprietà ben definite.

In termini molto generali il problema fondamentale della combinatoria è quello di stabilire se una data disposizione di oggetti secondo certe regole sia possibile o meno.

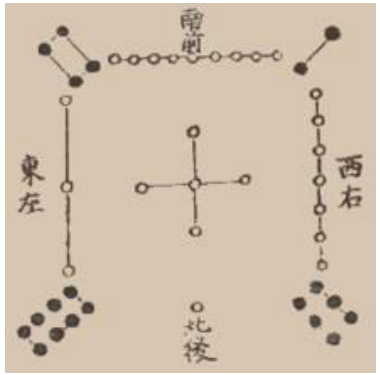
- Problemi tra i più noti: calcolo del numero di permutazioni, di disposizioni, di combinazioni di oggetti
- Problemi combinatori sono stati studiati fin dall'antichità, ma la combinatoria come area consistente della matematica è stata riconosciuta solo nell'ultimo cinquantennio.

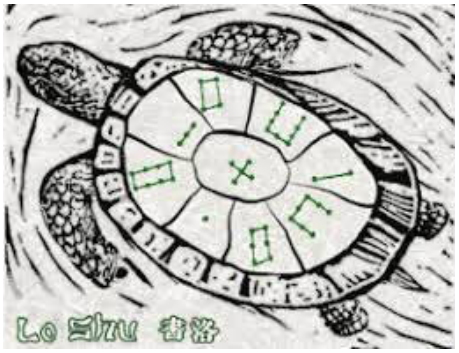


Cina

I 64 esagrammi dell' *I Ching*

Il quadrato magico di Lo Shu

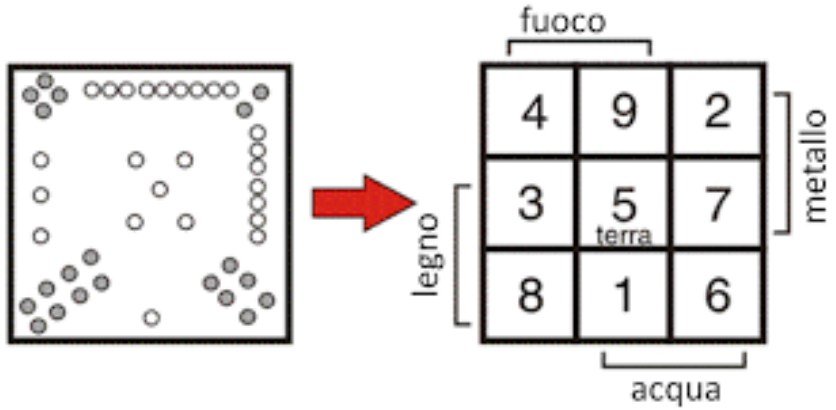




Un giorno l'imperatore Yu, che camminava lungo il fiume Lo, notò una tartaruga che usciva dall'acqua con strani segni sul dorso e, dopo un attento esame, scoprì che i segni rappresentavano dei numeri, e che il modello formava un quadrato magico.

- Il primo esempio oggi noto di quadrato magico

$$S(n) = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$



Yang Hui (1275 d.C.)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	17	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

Quadrati dall'ordine 3 all'ordine 10

Yang Hui afferma di stare riportando cose ben note, che si tratta di quadrati prodotti in epoche precedenti (in effetti non sa spiegare come siano stati costruiti) sebbene non sia stata trovata traccia di essi in scritti cinesi precedenti.

Si tratta di quadrati di cui non si hanno eguali altrove

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

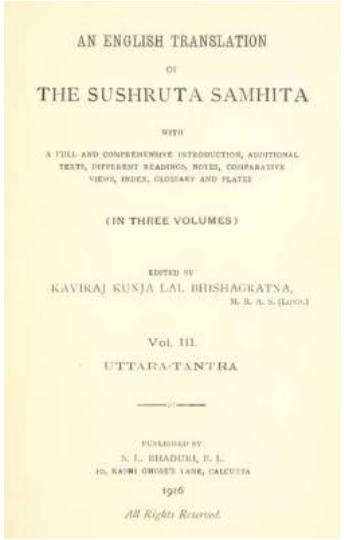
1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

India

Sembra che i primi a considerare questioni relative a permutazioni e combinazioni siano stati i popoli indiani.

Dai testi risulta che gli studiosi indiani abbiano mostrato interesse nel mettere le cose in un ordine regolare, applicando tecniche di ordinamento a vari tipi di argomenti e concetti.

Sushruta samhita (VI sec. a.C.): cap. LXIII discute sulle possibili combinazioni di 6 sostanze base



AN ENGLISH TRANSLATION

OF

THE SUSHRUTA SAMHITA

WITH

A FULL AND COMPREHENSIVE INTRODUCTION, ADDITIONAL TEXTS, DIFFERENT READINGS, NOTES, COMPARATIVE VIEWS, INDEX, GLOSSARY AND PLATES

(IN THREE VOLUMES)

EDITED BY

KAVIRAJ KUNJA LAL BHISHAGRATNA,

M. R. A. S. (LOND.)

Vol. III.

UTTARA-TANTRA

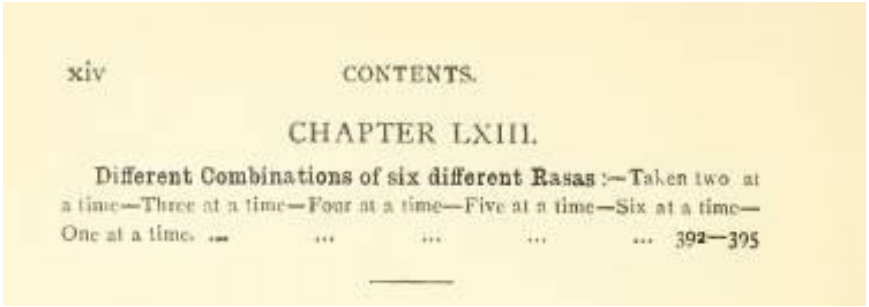
PUBLISHED BY

N. L. BHADURI, P. L.

10, NAMI GHOSE'S LANE, CALCUTTA

1916

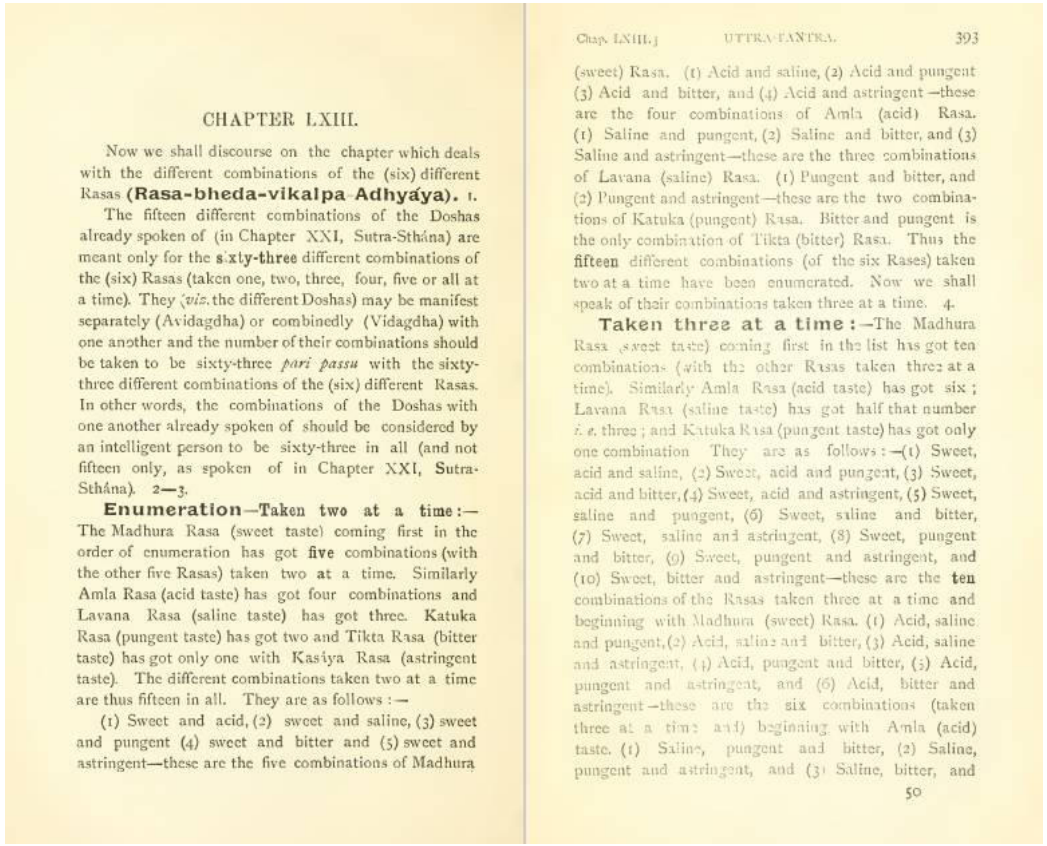
All Rights Reserved.



xiv CONTENTS.

CHAPTER LXIII.

Different Combinations of six different Rasas:—Taken two at a time—Three at a time—Four at a time—Five at a time—Six at a time—One at a time. ... ... 392—395



CHAPTER LXIII.

Now we shall discourse on the chapter which deals with the different combinations of the (six) different Rasas **(Rasa-bheda-vikalpa Adhyáya).** 1.

The fifteen different combinations of the Doshas already spoken of (in Chapter XXI, Sutra-Sthána) are meant only for the **sixty-three** different combinations of the (six) Rasas (taken one, two, three, four, five or all at a time). They (*viz.* the different Doshas) may be manifest separately (Avidagdha) or combinedly (Vidagdha) with one another and the number of their combinations should be taken to be sixty-three *pari passu* with the sixty-three different combinations of the (six) different Rasas. In other words, the combinations of the Doshas with one another already spoken of should be considered by an intelligent person to be sixty-three in all (and not fifteen only, as spoken of in Chapter XXI, Sutra-Sthána). 2—3.

Enumeration—Taken two at a time:—The Madhura Rasa (sweet taste) coming first in the order of enumeration has got **five** combinations (with the other five Rasas) taken two at a time. Similarly Amla Rasa (acid taste) has got four combinations and Lavana Rasa (saline taste) has got three. Katuka Rasa (pungent taste) has got two and Tikta Rasa (bitter taste) has got only one with Kasáya Rasa (astringent taste). The different combinations taken two at a time are thus fifteen in all. They are as follows:—

(1) Sweet and acid, (2) sweet and saline, (3) sweet and pungent (4) sweet and bitter and (5) sweet and astringent—these are the five combinations of Madhura

(sweet) Rasa. (1) Acid and saline, (2) Acid and pungent (3) Acid and bitter, and (4) Acid and astringent—these are the four combinations of Amla (acid) Rasa. (1) Saline and pungent, (2) Saline and bitter, and (3) Saline and astringent—these are the three combinations of Lavana (saline) Rasa. (1) Pungent and bitter, and (2) Pungent and astringent—these are the two combinations of Katuka (pungent) Rasa. Bitter and pungent is the only combination of Tikta (bitter) Rasa. Thus the **fifteen** different combinations (of the six Rasas) taken two at a time have been enumerated. Now we shall speak of their combinations taken three at a time. 4.

Taken three at a time:—The Madhura Rasa (sweet taste) coming first in the list has got ten combinations (with the other Rasas taken three at a time). Similarly Amla Rasa (acid taste) has got six; Lavana Rasa (saline taste) has got half that number *i. e.* three; and Katuka Rasa (pungent taste) has got only one combination. They are as follows:—(1) Sweet, acid and saline, (2) Sweet, acid and pungent, (3) Sweet, acid and bitter, (4) Sweet, acid and astringent, (5) Sweet, saline and pungent, (6) Sweet, saline and bitter, (7) Sweet, saline and astringent, (8) Sweet, pungent and bitter, (9) Sweet, pungent and astringent, and (10) Sweet, bitter and astringent—these are the **ten** combinations of the Rasas taken three at a time and beginning with Madhura (sweet) Rasa. (1) Acid, saline and pungent, (2) Acid, saline and bitter, (3) Acid, saline and astringent, (4) Acid, pungent and bitter, (5) Acid, pungent and astringent, and (6) Acid, bitter and astringent—these are the six combinations (taken three at a time and) beginning with Amla (acid) taste. (1) Saline, pungent and bitter, (2) Saline, pungent and astringent, and (3) Saline, bitter, and

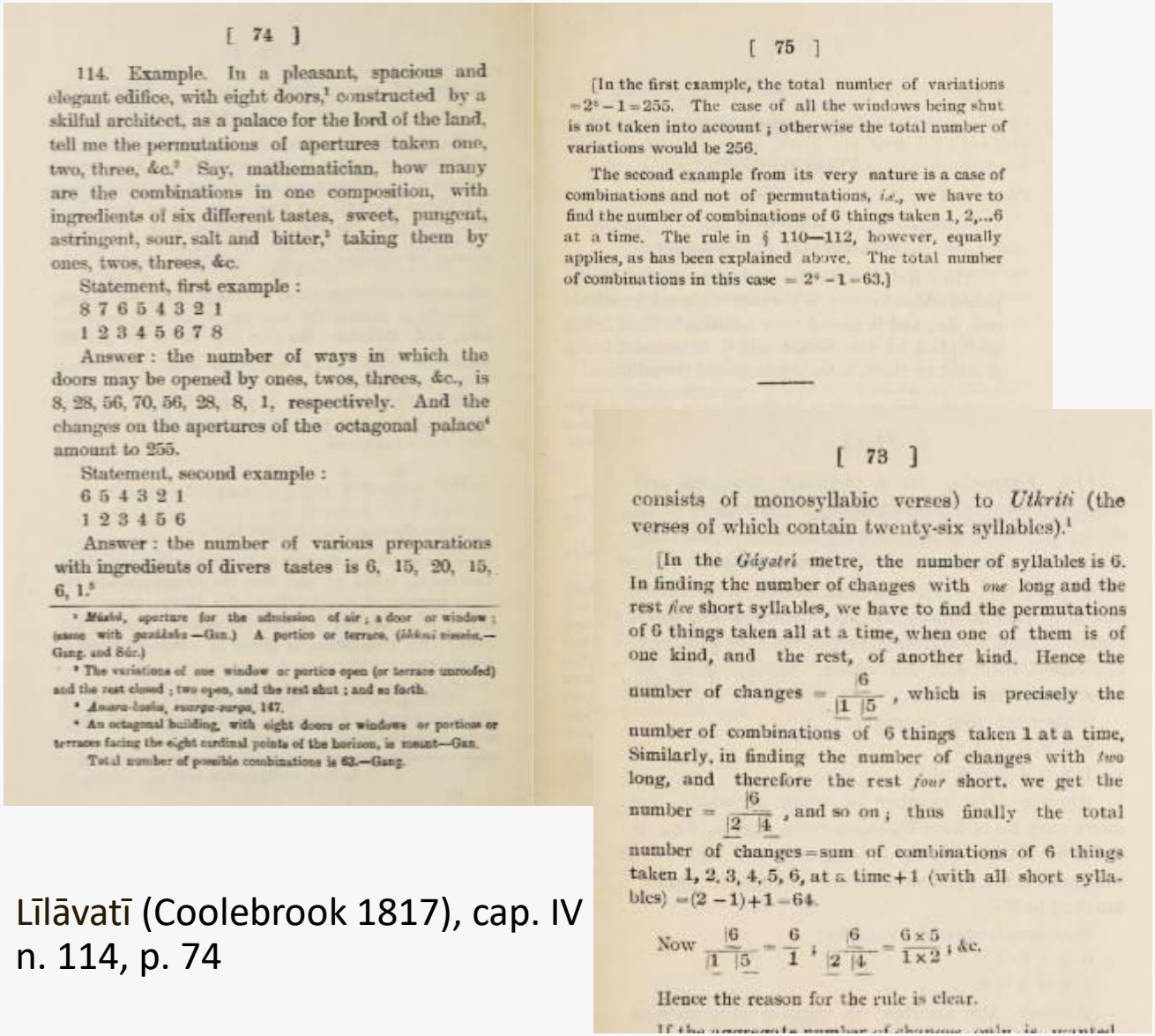
Sistematica lista di combinazioni dei sei elementi

- Presi singolarmente (6)
- Presi a 2 a 2 (15)
- Presi a 3 a 3 (20)
- Presi a 4 a 4 (15)
- Presi a 5 a 5 (6)
- Presi tutti insieme (1)

- Gianisti (II sec. a.C.): combinazioni di categorie filosofiche, di sensi, di generi
- *Mānava-Dharmaśāstra* (testo sacro scritto tra il II sec. a.C e il II sec. d.C.): enumera e critica le vari possibili forme di «caste miste» derivanti da matrimoni tra uomini e donne appartenenti a ciascuna delle 4 classi sociali
- *Chandaḥsūtra* ("Regole di metrica") di Pingala (2º o 1º sec. a. C.), il più antico trattato indiano di metrica e prosodi: considera tutte le possibili variazioni che possono essere costruite a partire da un certo numero di sillabe lunghe (forti) e corte (leggere). Sviluppa un algoritmo per ottenerle tutte, molto sintetiche per la cui comprensione si ricorre ai testi dei commentatori.

1.	SSSS	5.	SSIS	9.	SSSI	13.	SSII
2.	ISSS	6.	ISIS	10.	ISSI	14.	ISII
3.	SISS	7.	SIIS	11.	SISI	15.	SIII
4.	IISS	8.	IIIS	12.	IISI	16.	IIII

- Iniziare con la combinazione in cui tutte le sillabe sono lunghe (SSSS)
- Sostituire la sillaba più a sinistra con una corta per formare la seconda combinazione
- Per la terza combinazione, cambiare solo la seconda sillaba nella prima combinazione, con una corta, e per la quarta , rendere la prima sillaba anch'essa corta. La sequenza di possibilità per le prime due sillabe è ora (SS, IS, SI, II)
- Continuare il processo ricorsivamente, in modo tale che ciascuna variazione con la k-esima sillaba corta, ma la seguente sillaba lunga, sia conforme alla sequenza standard per le precedenti k-1 sillabe. La variazione finale contiene solo sillabe corte



[74]

114. Example. In a pleasant, spacious and elegant edifice, with eight doors,[1] constructed by a skilful architect, as a palace for the lord of the land, tell me the permutations of apertures taken one, two, three, &c.[2] Say, mathematician, how many are the combinations in one composition, with ingredients of six different tastes, sweet, pungent, astringent, sour, salt and bitter,[3] taking them by ones, twos, threes, &c.

Statement, first example :

8 7 6 5 4 3 2 1

1 2 3 4 5 6 7 8

Answer : the number of ways in which the doors may be opened by ones, twos, threes, &c., is 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, respectively. And the changes on the apertures of the octagonal palace[4] amount to 255.

Statement, second example :

6 5 4 3 2 1

1 2 3 4 5 6

Answer : the number of various preparations with ingredients of divers tastes is 6, 15, 20, 15, 6, 1.[5]

[1] *Mārgā*, aperture for the admission of air; a door or window; (same with *gavākshe*—Gan.) A portico or terrace. (*ālōkni vistāre*.—Gang. and Sūr.)

[2] The variations of one window or portico open (or terrace unroofed) and the rest closed; two open, and the rest shut; and so forth.

[3] *Amara-lavaṇa, ruchya-rurpa*, 147.

[4] An octagonal building, with eight doors or windows or porticos or terraces facing the eight cardinal points of the horizon, is meant—Gan.

Total number of possible combinations is 63.—Gang.

[75]

[In the first example, the total number of variations $=2^8-1=255$. The case of all the windows being shut is not taken into account; otherwise the total number of variations would be 256.

The second example from its very nature is a case of combinations and not of permutations, *i.e.*, we have to find the number of combinations of 6 things taken 1, 2,...6 at a time. The rule in § 110—112, however, equally applies, as has been explained above. The total number of combinations in this case $= 2^6-1=63$.]

[73]

consists of monosyllabic verses) to *Utkriti* (the verses of which contain twenty-six syllables).[1]

[In the *Gáyatri* metre, the number of syllables is 6. In finding the number of changes with *one* long and the rest *five* short syllables, we have to find the permutations of 6 things taken all at a time, when one of them is of one kind, and the rest, of another kind. Hence the number of changes $= \frac{|6}{|1\ |5}$, which is precisely the number of combinations of 6 things taken 1 at a time. Similarly, in finding the number of changes with *two* long, and therefore the rest *four* short, we get the number $= \frac{|6}{|2\ |4}$, and so on; thus finally the total number of changes=sum of combinations of 6 things taken 1, 2, 3, 4, 5, 6, at a time+1 (with all short syllables) $=(2-1)+1=64$.

Now $\frac{|6}{|1\ |5}=\frac{6}{1}$; $\frac{|6}{|2\ |4}=\frac{6\times5}{1\times2}$; &c.

Hence the reason for the rule is clear.

Līlāvatī (Coolebrook 1817), cap. IV n. 114, p. 74

Bhāskara (1114 – 1185)

Bhāskaràcārya ("Bhāskara il maestro") o Bhāskara II
Matematico e astronomo indiano del XII sec.

In un gradevole edificio spazioso ed elegante, con otto porte, costruite da un abile architetto per il Signore della terra, dimmi le [combinazioni] delle aperture prese ad una, due, tre, ecc. Di' matematico, quante sono le combinazioni in una composizione, con ingredienti di sei gusti diversi, dolce, pungente, astringente, acido, salato e amaro, prendendoli per uno, due, o tre, ecc.

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

Gli antichi greci

Per lungo tempo si è ritenuto che gli antichi Greci non avessero avuto alcun interesse nelle questioni combinatorie. (es.: Biggs 1979)

«Sospetto che, dietro una posizione storiografica così fortemente negativa, possano aver concorso due diverse motivazioni: il pregiudizio che vede gli "antichi matematici greci" come menti che ragionano geometricamente e il tentativo di rivalutare alcuni aspetti della matematica non occidentale sostenendo tendenziosamente che tali aspetti non potevano essere stati nemmeno concepiti dai "greci".»

(Acerbi, F. 2003)

Ma ora egli stesso [Crisippo] afferma che il numero di congiunzioni prodotte per mezzo di dieci assertivi supera il milione, pur non avendo indagato attentamente la questione da solo né ricercato la verità con l'aiuto di esperti. [...] Crisippo è confutato da tutti gli aritmetici, tra cui lo stesso Ipparco che dimostra che il suo errore di calcolo è enorme, se infatti l'affermazione dà 103049 congiunzioni assertive e la negazione 310952.
[**Plutarco, *De Stoicorum repugnantiis***, 1047 C-E]

103049 : decimo numero di Schröder (Ipparco)
310952 : differisce di poco dalla metà della somma tra il decimo e l'undicesimo numero di Schröder

Lo ***Stomachion*** era un trattato di geometria combinatoria.
Il focus di Archimede potrebbe essere non la possibilità di creare molte diverse figure mediante diverse combinazioni dei pezzi, ma il modo in cui la stessa figura di partenza può essere ottenuta mediante diverse combinazioni dei pezzi.
(Netz, Acerbi, Wilson 2004)

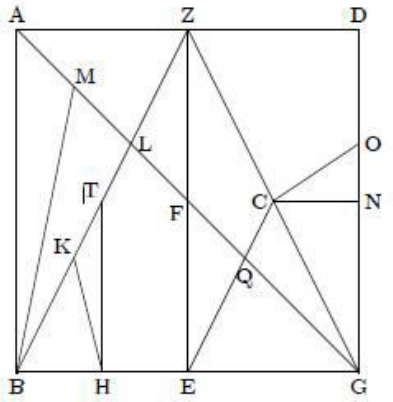
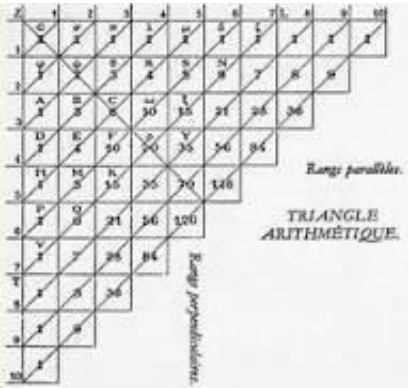


Fig. 1. The diagram of the Arabic proposition.

- XIII sec. Leonardo Fibonacci, *Liber abbaci*
  - Sette vecchie vanno a Roma; ognuno di loro ha sette muli; ogni mulo porta sette sacchi; ogni sacco contiene sette pani; ogni pagnotta ha sette coltelli; e ogni coltello ha sette foderi. Qual è il numero totale di oggetti? [Boncompagni 1857, p. 311)
- 1560 ca. - Gerolamo Cardano, *Liber de ludo aleae (pub. 1663)*
- 1654 – *Corrispondenza tra Blaise Pascal e Pierre de Fermat*
  - Fermat usa il metodo delle combinazioni (elenca tutti i casi che possono presentarsi) per risolvere il *problema delle parti (trattato già in precedenza da Tartaglia , Pacioli & al.)*
- 1654 – Blaise Pascal*, Traité du Triangle Arithmétique*
  - Numero di combinazioni di n oggetti presi r volte
- 1666 – Gottfried W. Leibniz, *Dissertatio de arte combinatoria*
  - Costruire la dottrina delle combinazioni e delle permutazioni a partire dai fondamenti dell'aritmetica
  - Dimostrare l'utilità di entrambe per la totalità delle scienze
- 1713 – Jacob Bernoulli, *Ars conjectandi* (postumo)
  - Pars secunda. Doctrinam de Permutatinibus & combinationibus.



MSC2020-Mathematics Subject Classification System

https://mathscinet.ams.org/msnhtml/msc2020.pdf

- **Combinatoria enumerativa**: enumerazione di oggetti e/o configurazioni («contare»)
- **Disegni e configurazioni**: disposizioni di sottoinsiemi di un insieme, o di lettere in uno schema di qualche tipo.
  - Problema delle collegiali di Kirkman: 15 collegiali escono 3 alla volta per 7 giorni di seguito. Si chiede di redigere un calendario in modo tale che due qualunque di esse non escano mai insieme due volte.
  - Problema degli ufficiali di Euler: Dati trentasei ufficiali di sei gradi diversi e di sei reggimenti diversi, uno per ogni grado e reggimento, è possibile sistemare i trentasei ufficiali in un quadrato 6×6 in modo che in ogni riga e colonna vi sia uno e un solo ufficiale per ogni grado e reggimento?
- **Teoria dei grafi:** Un grafo è una particolare struttura combinatoria
  - Problemi di 'connessione': considerazione di cammini a più passi che congiungono coppie di vertici
  - Problemi di 'colorazione' (di vertici o di spigoli)

MSC2020-Mathematics Subject Classification System

https://mathscinet.ams.org/msnhtml/msc2020.pdf

- **Combinatoria estremale**: situazioni nelle quali una disposizione di un qualche tipo non è sempre possibile.
  - Es. (Kirkman) ci si chiede se sia possibile scegliere un insieme di sottoinsiemi con tre elementi dell'insieme $\{1,\ldots,n\}$ in modo che due elementi qualunque compaiano simultaneamente in uno dei sottoinsiemi scelti (si tratta del problema delle collegiali senza la richiesta che le ragazze debbano camminare in fila per tre in cinque righe). Kirkman dimostrò che una soluzione è possibile se e soltanto se n è congruo a 1 o 3 mod 6; un insieme soluzione contiene esattamente $n(n^{-1})/6$ terne. Per i valori di n per i quali non vi sono soluzioni ci si possono porre le seguenti domande: qual è il massimo numero di terne tale che due elementi qualunque capitino insieme al più una volta? Qual è il minimo numero di terne tale che due qualunque elementi capitino insieme almeno una volta?

- **Combinatoria algebrica**: utilizza metodi dell'algebra astratta, facendo riferimento in particolare alle strutture della teoria dei gruppi e della teoria delle rappresentazioni, per affrontare numerosi problemi di natura combinatoria e per converso si serve di configurazioni combinatorie e di tecniche algoritmico-combinatorie per analizzare strutture e problemi dell'algebra astratta.

Frank Plumpton Ramsey (1906 – 1930)

- Filosofo, matematico, economista
- **1923** Laurea in Matematica al Trinity College, Cambridge
- **1924** Membro del King's College
- Produzione scientifica caratterizzata da un ampio spettro di interessi interdisciplinari. Raggiunse risultati eccellenti
- Teoria di Ramsey: branca nuova della combinatoria
- **1930** Morte per i postumi di un intervento chirurgico

La teoria di Ramsey

La fama duratura di Ramsey nella matematica … si basa su un teorema di cui non aveva bisogno, dimostrato nel corso dei suoi tentativi di ottenere qualcosa che ora sappiamo non è possibile ottenere!
(Mellor, 1983)

Ramsey (1928) – *On a problem of formal logic*

- Esamina metodi per determinare la consistenza di una formula logica
- Introduce teoremi di combinatoria che sono il fondamento della cosiddetta teoria di Ramsey
- Tentativo di risolvere casi particolari dell'*Entscheidungsproblem* di Hilbert
- **1936** Alonzo Church negli Stati Uniti e indipendentemente Alan Turing in Inghilterra dimostrarono che l' *Entscheidungsproblem* non ammette una soluzione generale
- Per dimostrare i casi particolari considerati da Ramsey, i suoi lemmi combinatori non sono necessari

[Questo risultato fu ottenuto] *studiando un caso speciale di uno dei principali problemi della logica matematica, il problema di trovare una procedura regolare per determinare la verità o la falsità di una data formula logica (Entscheidungsproblem). Ma nel corso di questa indagine è stato necessario usare certi teoremi sulle combinazioni che hanno interesse indipendente* (Ramsey, 1928, p.264)

Supponiamo che Γ sia una classe infinita, e siano r, μ due interi positivi; e supponiamo che tutte le sottoclassi di Γ che hanno esattamente m elementi (membri) o, che tutte le r-combinazioni degli elementi di Γ siano divise in una qualsiasi maniera in μ classi mutualmente esclusive C_i ($i = 1, 2, \ldots, \mu$), così che ogni r-combinazione è un elemento di una e una sola classe C_i; allora, Γ deve contenere una sottoclasse infinita Δ tale che tutte le r-combinazioni dei membri di Δ appartengono alla stessa classe C_i.

(Ramsey, 1928), p. 264, Teorema A.

Dati r, n, μ, possiamo determinare m_0 tale che, se $m \geq m_0$ e le r-combinazioni di ogni Γ_m sono divise in una qualsiasi maniera in μ classi mutualmente esclusive C_i ($i = 1, 2, \ldots, \mu$), allora Γ_m deve contenere una sottoclasse Δ_n tale che tutte le r-combinazioni dei membri di Δ_n appartengono alla stessa classe C_i.

(Ramsey, 1928), p. 267, Teorema B.

«Every large set of numbers, points or objects necessary contains a highly regular pattern»

Graham & Spencer (1990)

«Un completo disordine è impossibile»

The influence in mathematics of its two neighbours, physics and logic, is sometimes opposite or, at least complementary. Whereas the entropy theorems of probability theory and mathematical physics imply that, in a large universe, disorder is probable, certain combinatorial theorems show that complete disorder is impossible.

*T. Motz*kin (1967)

Grafi e colorazioni

Grafo: particolare struttura combinatoria che consta di un insieme di ***vertici***, alcune coppie dei quali sono congiunte da segmenti (***spigoli***).

Grafo completo: ogni vertice è collegato direttamente a tutti i vertici rimanenti.

n-clique **:** sottografo completo su *n* vertici

Colorazione di un grafo: è un caso speciale di etichettamento dei grafi; cioè un'assegnazione di etichette, tradizionalmente chiamate "colori", agli elementi di un grafo soggetta a determinati vincoli.

Es. Colorazione di spigoli, colorazione di vertici

n-clique **monocromatica**: sottografo completo su *n* vertici, avente gli spigoli di uno stesso colore.

Dati r, n, μ, possiamo determinare m_0 tale che, se $m \geq m_0$ e le r-combinazioni di ogni Γ_m sono divise in una qualsiasi maniera in μ classi mutualmente esclusive C_i ($i = 1, 2, \ldots, \mu$), allora Γ_m deve contenere una sottoclasse Δ_n tale che tutte le r-combinazioni dei membri di Δ_n appartengono alla stessa classe C_i.

(Ramsey, 1928), p. 267, Teorema B.

- Per $r = 2$ e $\mu = 2$ il risultato fondamentale, ottenuto da Ramsey, in termini di grafi e colorazioni assume la forma seguente:

per ogni $n \geq 2$, esiste un intero $m = m(n)$ tale che ogni 2-colorazione di un grafo completo con almeno m vertici contiene una n-clique monocromatica.

- L'argomento proposto da Ramsey per dimostrare il risultato generale, nel caso $r = 2$, $\mu = 2$ dimostra che basta prendere $m_0(n) = 2^{n(n-1)/2}$ per garantire l'esistenza di n-clique monocromatiche. Non si tratta di un risultato ottimale.
- Quanto detto ci permette di inquadrare il risultato di Ramsey sia nella teoria dei grafi sia nella combinatoria estremale.

Numeri di Ramsey

R(n) = numero di Ramsey di ordine n

numero minimo di vertici per cui ogni 2-colorazione di un grafo completo ammette almeno una 2-clique monocromatica

R(r,s) numero minimo di vertici di un grafo tale che in ogni 2-colorazione (supp. Rosso e blu) si possano trovare una r-clique rossa o una s-clique blu

r \ s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			6	9	14	18	23	28	36	40-42
4				18	25	36-41	49-61	59-84	73-115	92-149
5					43-48	58-87	80-143	101-216	133-316	149-442
6						102-165	115-298	134-495	183-780	204-1171
7							205-540	217-1031	252-1713	292-2826
8								282-1870	329-3583	343-6090
9									565-6588	581-12677
10										798-23556

Il gioco di Ramsey (a coppie): le regole

Sia assegnata una configurazione iniziale di n punti (*vertici*).

Il giocatore "A" comincia congiungendo due vertici con un tratto rosso.

Il giocatore "B" risponde congiungendo due vertici (non già congiunti) con un tratto nero.

I giocatori ripetono le mosse alternandosi, rispettando due regole fondamentali:

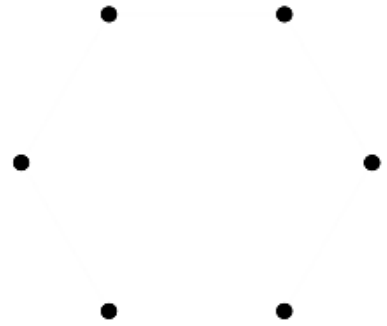
- due vertici possono essere congiunti al più da un tratto;
- ogni giocatore deve continuare ad usare lo stesso colore di partenza.

I tratti disegnati possono intersecarsi, ma queste intersezioni non si considerano come nuovi vertici.

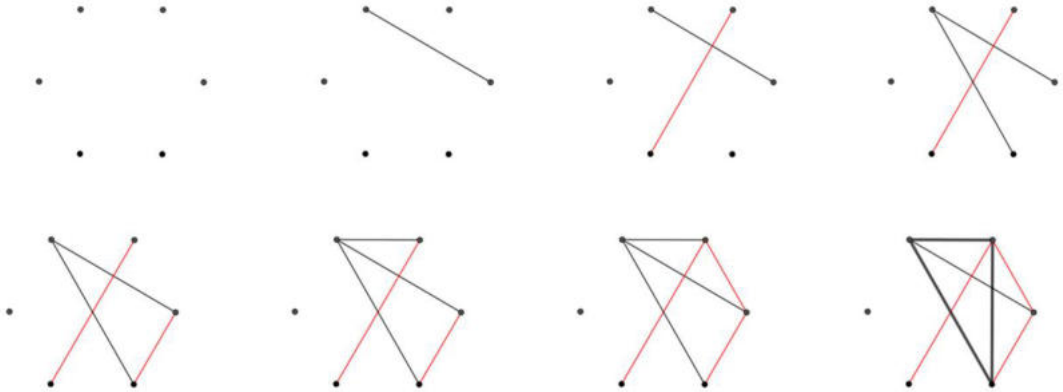
IL GIOCO SI CONCLUDE QUANDO:

- si determina il vincitore: colui che riesce a disegnare un triangolo monocromatico (3-clique monocromatica), cioè un triangolo in cui tutti i lati sono dello stesso colore
- si esauriscono le mosse.

Ramsey sei



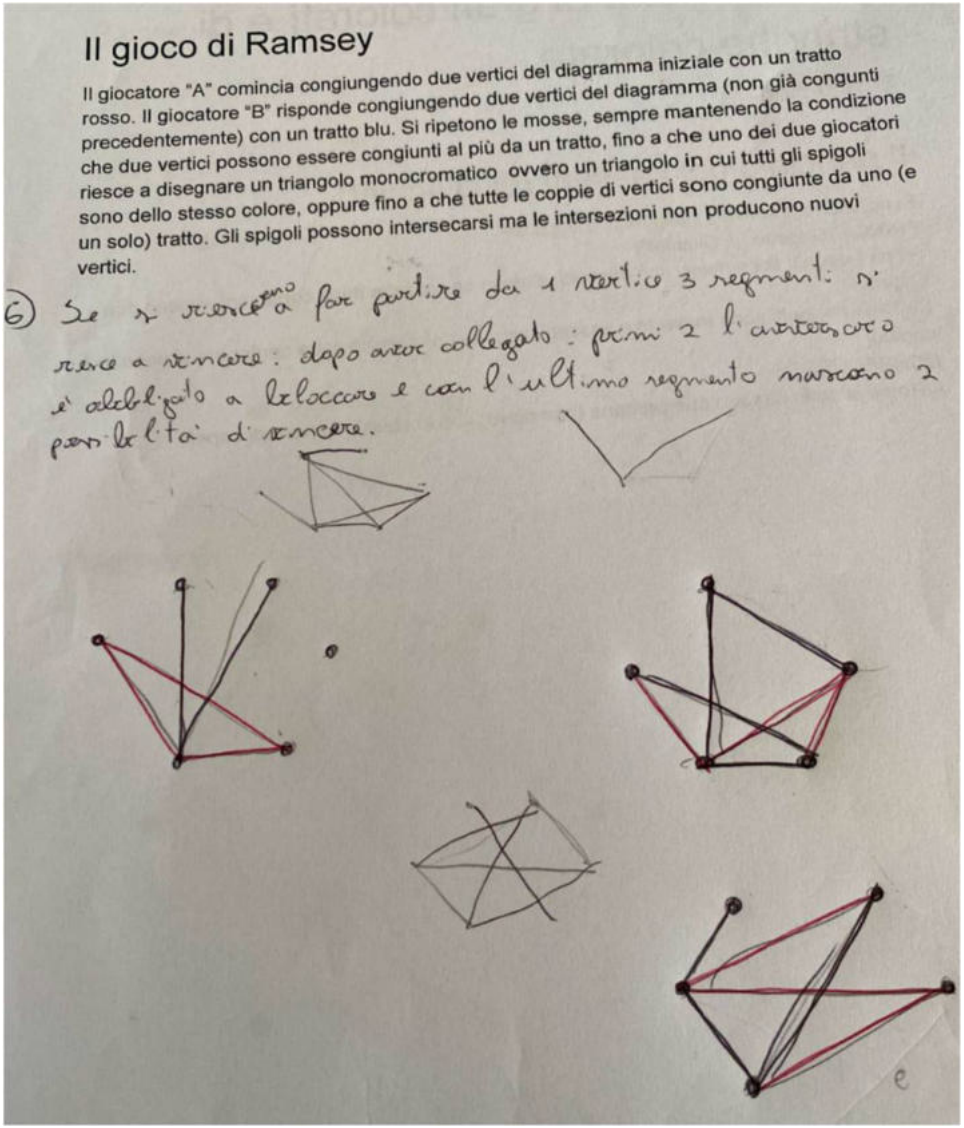
- Caso n=6
- Si gioca a coppie (o tra due squadre) su un foglio in cui è disegnato il numero di punti (vertici) – figura in alto
- In quali coppie c’è stato un vincitore?
- In quali coppie non ha vinto nessuno?



Classi III e IV liceo scientifico (liceo matematico)

DOMANDA 1: Qual è la strategia vincente (se esiste)?

Se si riescono a far partire da 1 vertice 3 segmenti si riesce a vincere: dopo aver collegato i primi 2 l'avversario è obbligato a bloccare e con l'ultimo segmento nascono 2 possibilità di vincere.



Il gioco di Ramsey

Il giocatore "A" comincia congiungendo due vertici del diagramma iniziale con un tratto rosso. Il giocatore "B" risponde congiungendo due vertici del diagramma (non già congunti precedentemente) con un tratto blu. Si ripetono le mosse, sempre mantenendo la condizione che due vertici possono essere congiunti al più da un tratto, fino a che uno dei due giocatori riesce a disegnare un triangolo monocromatico ovvero un triangolo in cui tutti gli spigoli sono dello stesso colore, oppure fino a che tutte le coppie di vertici sono congiunte da uno (e un solo) tratto. Gli spigoli possono intersecarsi ma le intersezioni non producono nuovi vertici.

6) Se si riescono a far partire da 1 vertice 3 segmenti si riesce a vincere: dopo aver collegato i primi 2 l'avversario è obbligato a bloccare e con l'ultimo segmento nascono 2 possibilità di vincere.

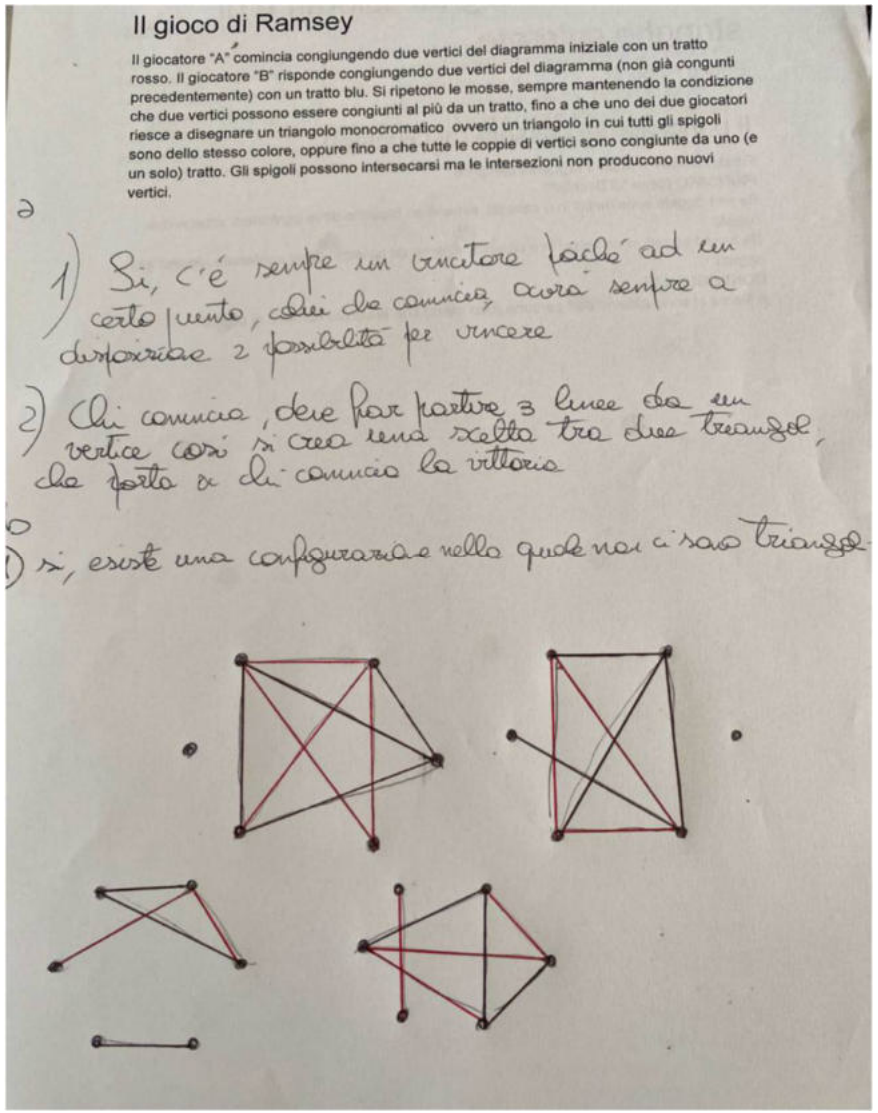
Dopo aver giocato diverse partite, gli studenti osservano che c'è sempre stato un vincitore.

- DOMANDA 2: Esiste sempre un vincitore?

1) Si c'è sempre un vincitore perché ad un certo punto, colui che comincia, avrà sempre a disposizione 2 possibilità per vincere

2) Chi comincia, deve far partire 3 linee da un vertice così si crea una scelta tra due triangoli che porta a chi comincia la vittoria

3) si, esiste una configurazione nella quale non ci sono triangoli



Il principio dei cassetti

"Principio di Dirichlet" o della Piccionaia

- Se $n + 1$ oggetti sono disposti in n cassetti, almeno uno dei cassetti deve contenere almeno due oggetti.
- Se $k \cdot n + 1$ oggetti sono disposti in n cassetti, almeno uno dei cassetti deve contenere almeno $k + 1$ oggetti.

Appare intuitivo ed elementare ma permette di ricondurre ad esso la deduzione rigorosa di fatti assai meno intuitivi, fuori dalla portata di un conteggio diretto.

Esempio: A Roma ci sono almeno due persone (non calve) con lo stesso numero di capelli.

Pigeon-hole principle

Nel caso n=6 un vincitore esiste sempre

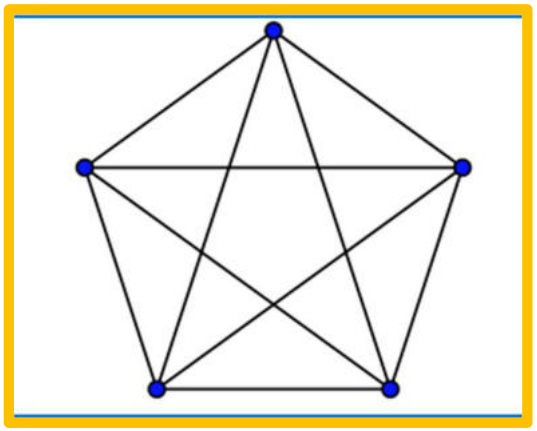
si dimostra ragionando per assurdo, utilizzando il principio dei cassetti.

- Supponiamo per assurdo che si sia giunti al termine del gioco senza un vincitore
- Allora ogni coppia di vertici del disegno iniziale è collegata da un segmento nero o rosso ma non ci sono triangoli monocromatici.
- Sia V uno qualsiasi dei vertici.
- Usiamo il principio dei cassetti:
  - **2 cassetti=2 colori, 5 segmenti uscenti da V = 5 oggetti**.
- Allora ci sono almeno tre segmenti dello stesso colore, diciamo rossi, che escono da V e lo congiungono a tre altri vertici, V_1, V_2, V_3.
- Se almeno una coppia V_i, V_j dei tre vertici fosse congiunta da un segmento rosso, avremmo il triangolo rosso V, V_i, V_j. Altrimenti avremmo il triangolo nero V_1, V_2, V_3. In entrambi casi si tratta di un assurdo.

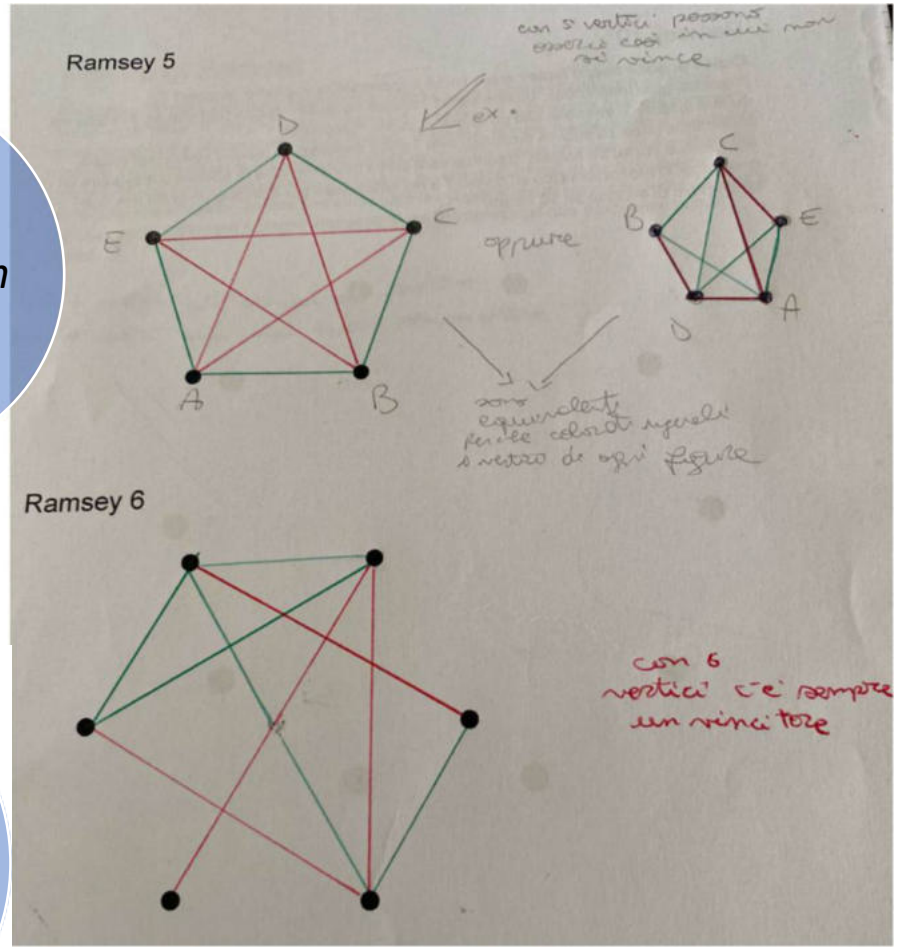
(PROBLEMA DELLE MUTUE CONOSCENZE)

Ramsey cinque

- Ci può essere un vincitore ma è possibile pareggiare.
- Il gioco si rivela poco interessante.
- Modifichiamo il gioco



Con 5 vertici possono esserci casi in cui non si vince



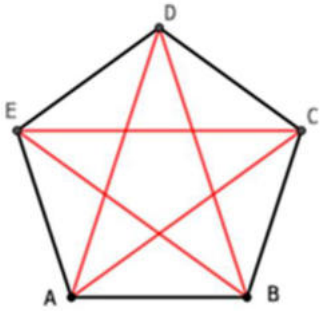
Sono equivalenti perché colorati uguali i vertici di ogni figura

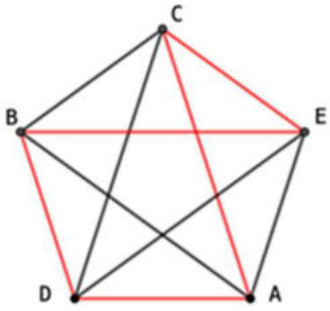
Gioco collaborativo

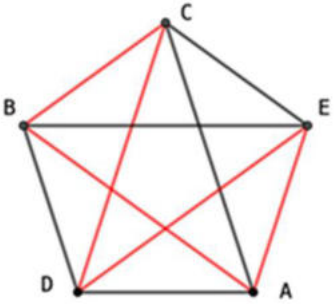
DOMANDE stimolo:

- Esiste un modo di colorare i segmenti che uniscono i vertici con due colori che sia priva di triangoli monocromatici?
- Quante colorazioni di questo tipo si riescono a trovare?
- Quali di queste si possono dire equivalenti?

2 **colorazioni** si dicono **equivalenti** se una può essere ottenuta dall'altra mediante una permutazione dei vertici







Giochiamo ad un gioco diverso…

Possibili varianti:

1. Disegnare triangoli monocromatici con 3 colori
2. Disegnare una figura monocromatica più complessa di un triangolo: quadrangolo completo

1. GIOCO: SFIDA A TRE

Si gioca in tre, ognuno con il proprio colore, vince il primo che riesce a disegnare un triangolo monocromatico unendo n vertici, disegnando a turno un segmento che li congiunge.
Il numero di vertici è compreso tra 10 e 17.

- Unendo con 3 colori 17 vertici deve necessariamente apparire un triangolo monocromatico
- Per un numero inferiore di vertici, sono possibili colorazioni prive di tali triangoli

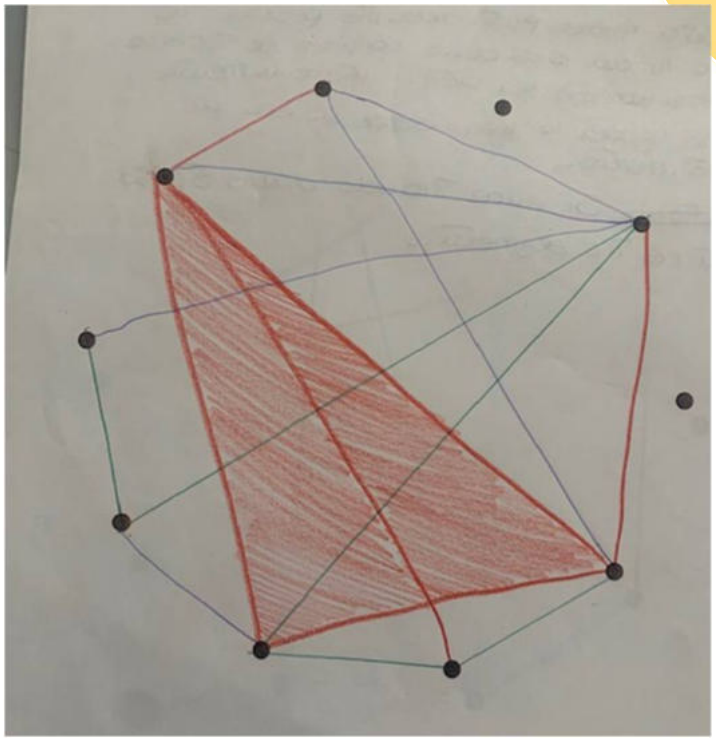
(Greenwood & Gleason, 1955, p.4)

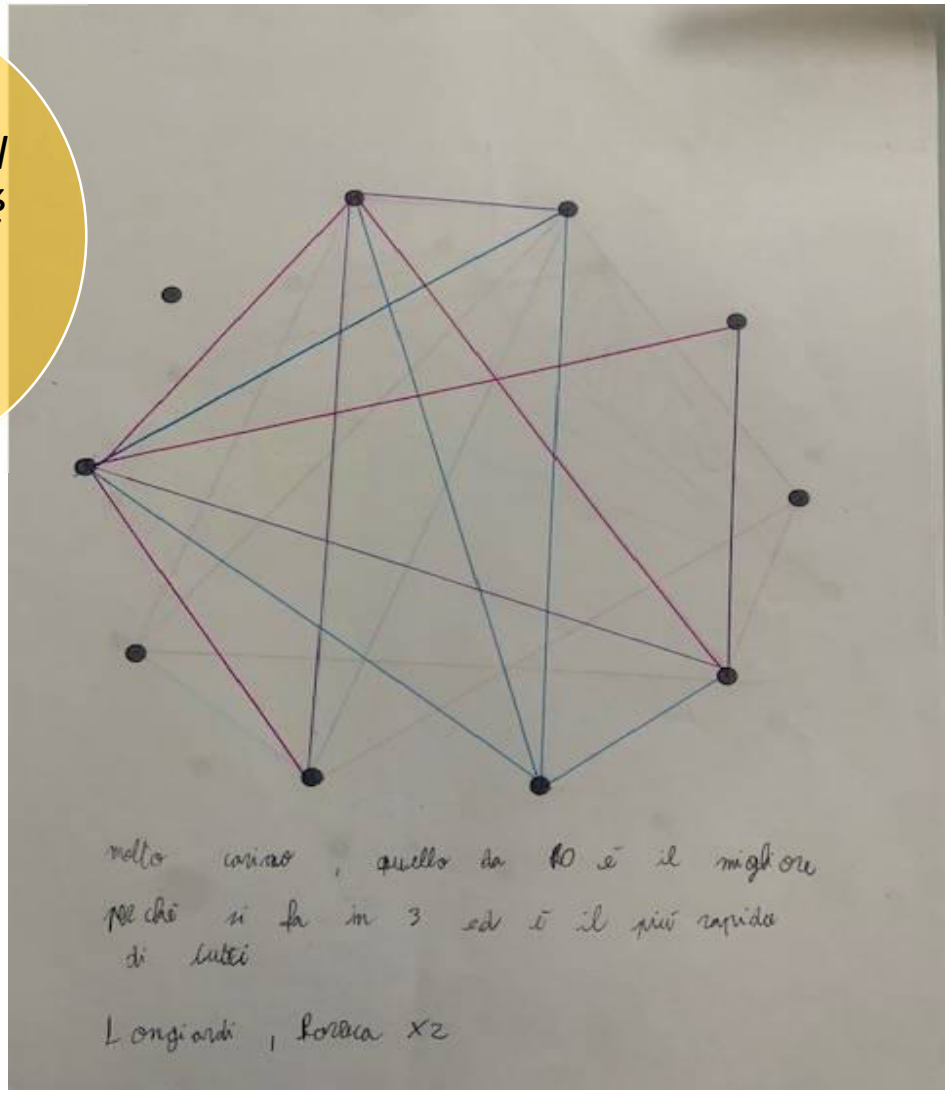
Il gioco più entusiasmante è il Ramsey 11 perché abbiamo capito la tecnica vincente che è uguale a quella del Ramsey 6, in quelli con più di 11 vertici non ci siamo divertiti perché già sapevamo che per vincere bisognava far partire tre linee dallo stesso vertice

Il gioco con 5 e 6 vertici risultava più semplice perché c'erano solo due colori, invece in quello con un numero di vertici ≥ 10 sono risultati più difficili perché non riuscivo a capire quale fosse la tecnica giusta

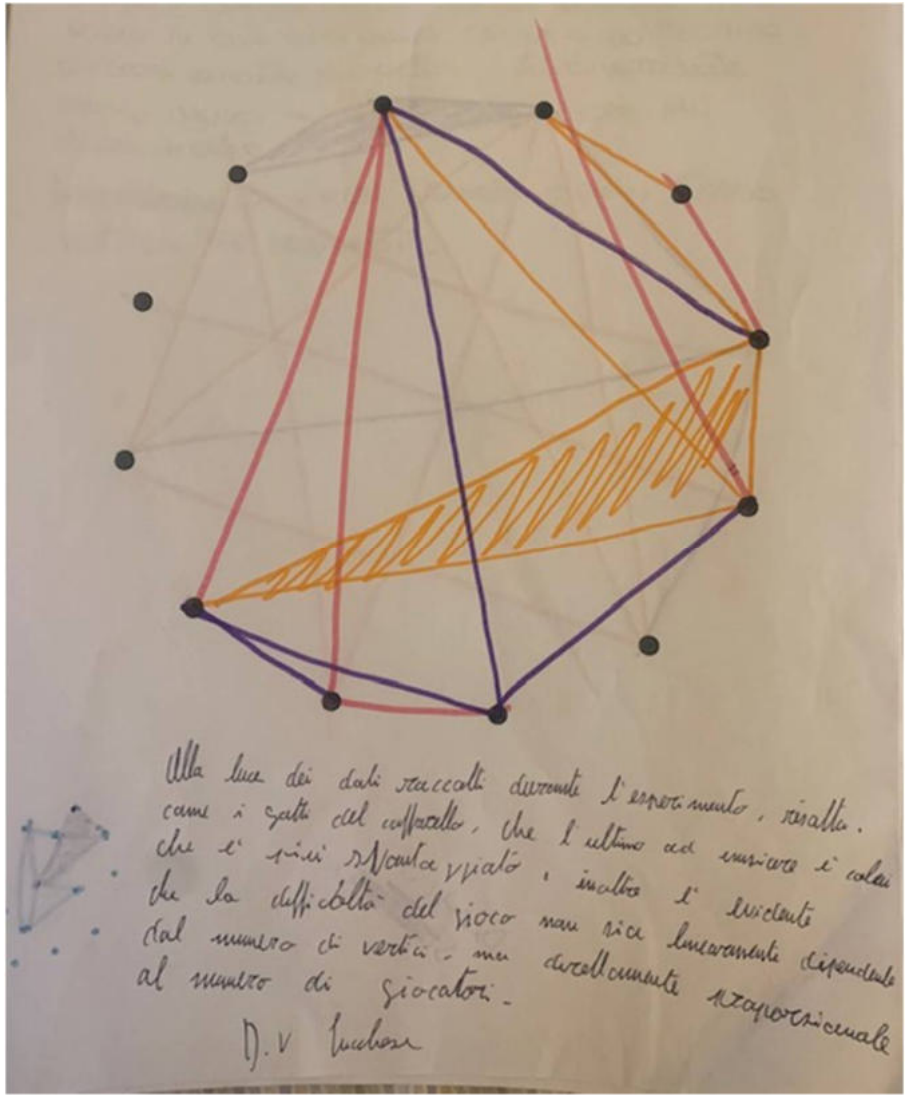
I giochi con più vertici erano più facili da concludere: la tecnica migliore per vincere è far partire più segmenti da uno stesso punto

molto carino, quello da 10 è il migliore perché si fa in 3 ed è il più rapido di tutti



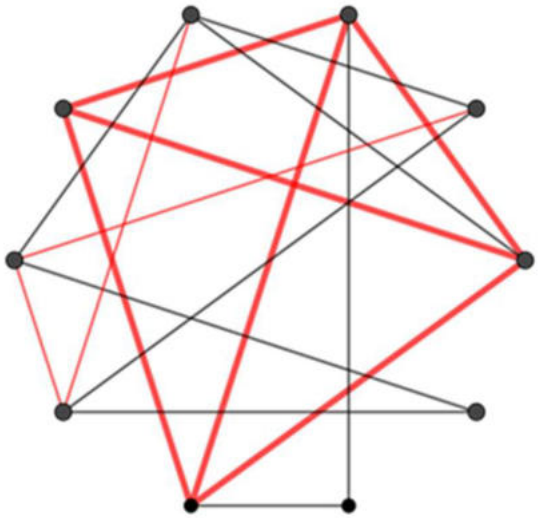


Alla luce dei dati raccolti durante l'esperimento, risalta, (…), che l'ultimo ad inserire è colui che è più svantaggiato, inoltre è evidente che la difficoltà del gioco non sia linearmente dipendente dal numero di vertici, ma direttamente proporzionale al numero dei giocatori



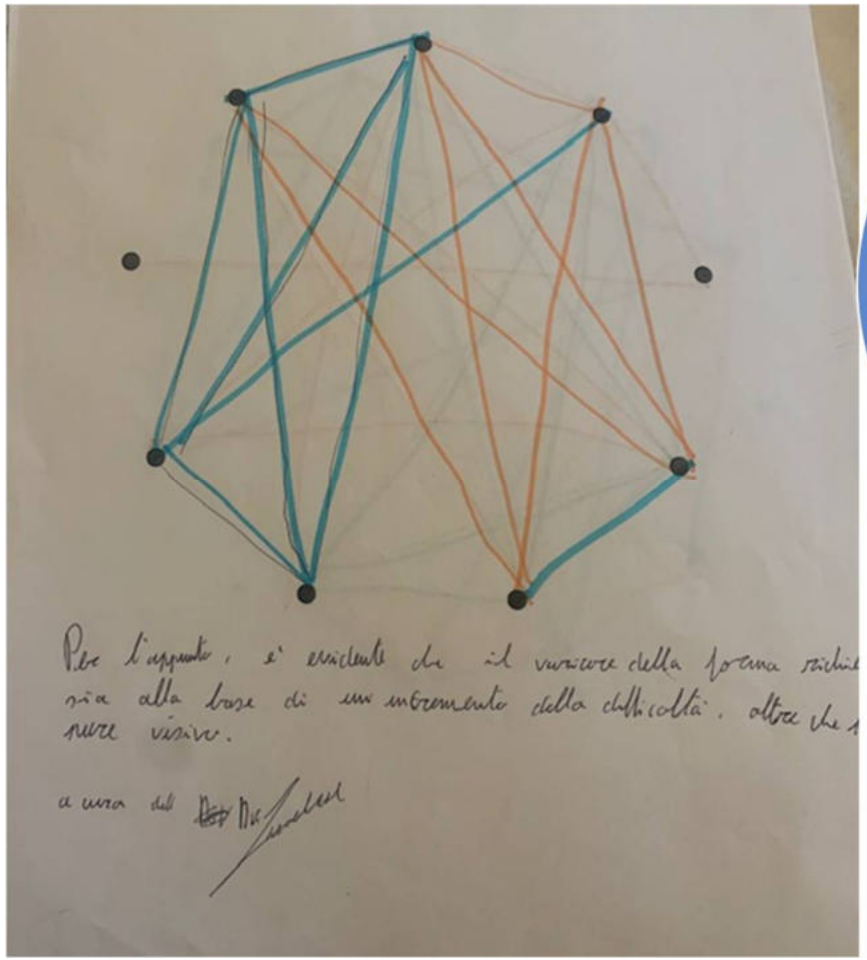
2.1 GIOCO: SFIDA A COPPIE

Si gioca in 2, ognuno con il proprio colore, vince il primo che riesce a disegnare un quadrangolo monocromatico in un grafo su 10 vertici, disegnando a turno un segmento che li congiunge.



Il quadrangolo completo è fatto da 6 segmenti che uniscono in tutti i possibili modi 4 vertici.

- Un quadrangolo completo, nel problema delle mutue conoscenze, modellizza un gruppo di 4 persone
- In un gruppo di 10 persone ne esistono sempre 4 che si conoscono a coppie oppure che non hanno nessuna conoscenza reciproca?



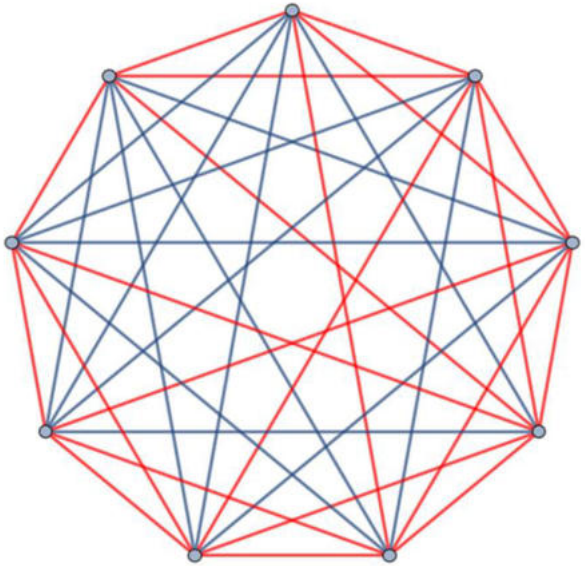
Per l'appunto, è evidente che il variare della forma richiesta sia alla base di un incremento della difficoltà, oltre che sia pure visivo

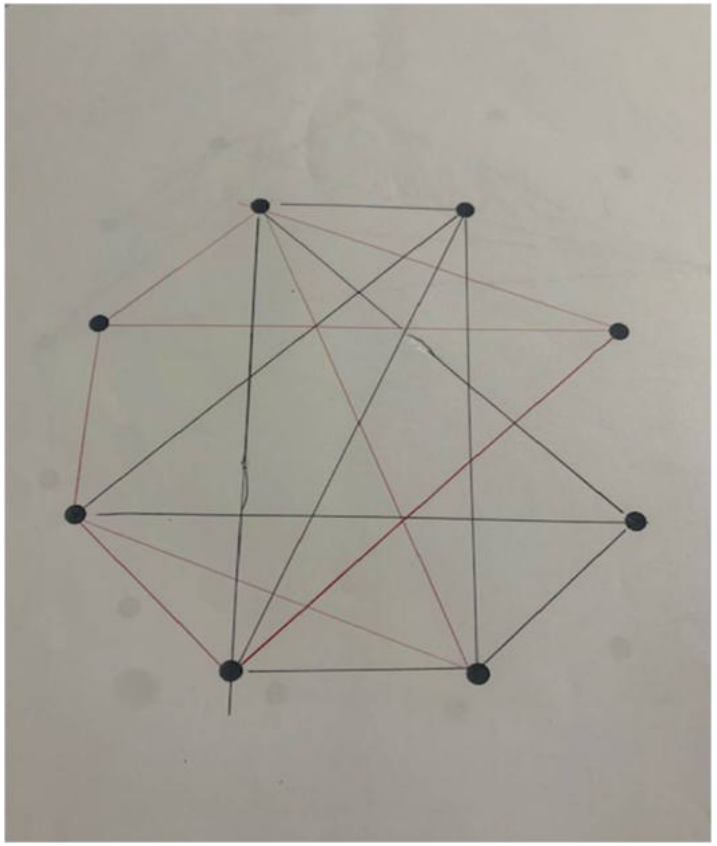
Non sembra una buona strada per proporre una sfida appassionante.

- È difficile riconoscere tali oggetti o confondersi nel controllare (tra molte linee) se l'aggiunta di un nuovo segmento completa un quadrangolo completo monocromatico.
- Modificare il problema e proporre un gioco collaborativo.

2.2 GIOCO COLLABORATIVO

Cercare una grafo completo colorato con due colori, in cui NON esista una quadrangolo completo monocromatico. Il numero di vertici è compreso tra 8 e 10.



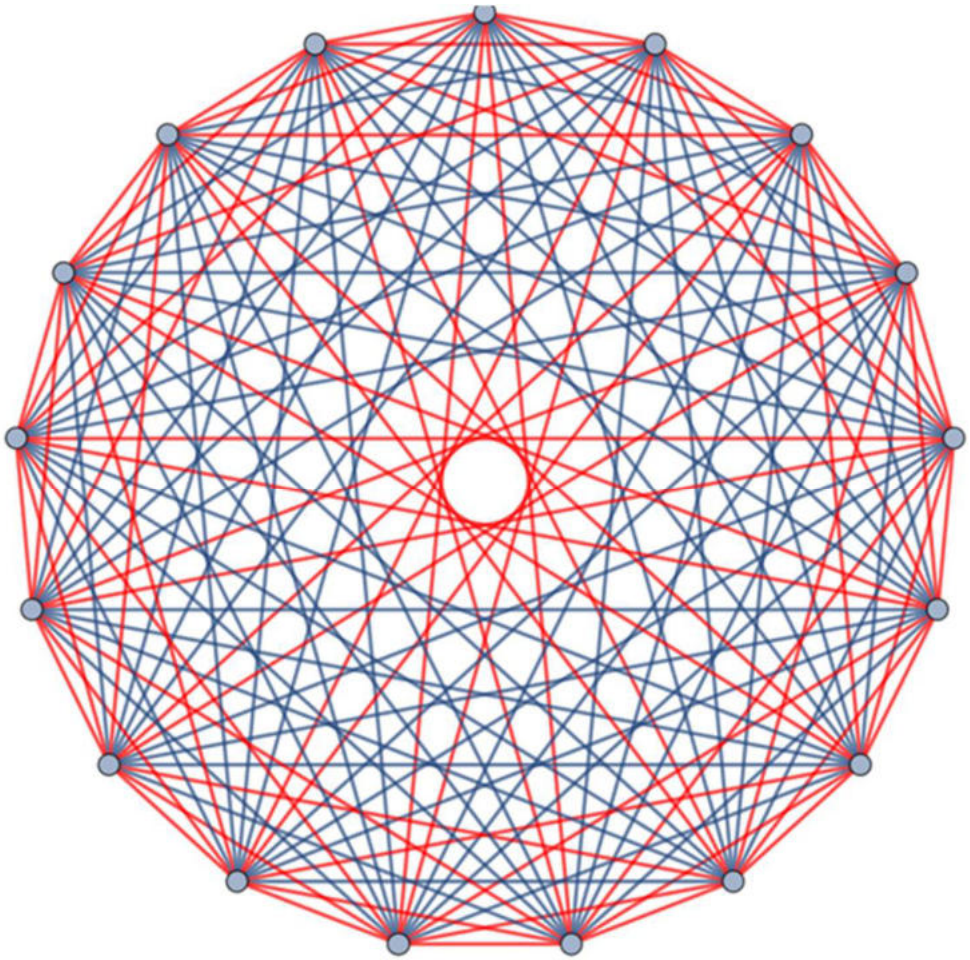


Grafo su 17 vertici

Non esistono 4-clique monocromatiche

- Si dimostra ricorrendo all'algebra del campo finito con 17 elementi

(Greenwood & Gleason, 1955).



- Differenza tra studenti di III e IV:
  - Classe III: il gioco è risultato per lo più fine a se stesso, ma l'elaborazione è più spontanea
  - Classe IV: riescono a creare collegamenti più facilmente e a cogliere il senso del gioco. Sono meno spontanei e si pongono prima il problema della ricerca di una strategia (atteggiamento più strutturato)
- Nonostante l'argomento fosse piuttosto complesso, essendo stato proposto come un gioco ha coinvolto tutti gli alunni che, dopo una iniziale difficoltà nel recepire le regole, hanno mostrato interesse, partecipazione, coinvolgimento e spirito di competizione e cercando la strategia vincente.
- È fondamentale, nella sperimentazione del gioco, capire quando il numero di vertici diventa troppo alto rendendone così difficile l'esecuzione, così come è importante non dilungarsi troppo sulla parte teorica che agli alunni risulta effettivamente troppo difficile da comprendere.
- Acquisizione di competenze e abilità: lavorare su immagini e nella modalità del gioco, consente di affrontare problemi (in questo caso di combinatoria) astratti in una maniera semplice e concreta, accessibile a tutti.

Grazie!

Bibliografia.

Acerbi, . (2003). On the Shoulders of Hipparcus. A Reappraisal of Ancient Greek Combinatorics. *Archive for History of Exact Sciences, 57,* 465-502.

Acerbi, F., Netz, R., Wilson. N. (2004). Towards a Reconstruction of Archimedes' *Stomachion. SCIAMVS,5,* 67-99.

Biggs, N.L. (1979). *The roots of combinatorics*. *Historia mathematica, 6,* 109-136.

Greenwood, R., & Gleason, A. (1955). Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canadian Journal of Mathematics, 7,* 1–7.

Katz, M., & Reimann, I. (2018). An Introduction to Ramsey Theory. *Providence: American Mathematical Society.*

Mellor, D. H. (1983). The eponymous F. P. Ramsey. *Journal of Graph Theory, 7*(1), 9–13.

Motzkin, T. (1967). Cooperative classes of finite sets in one and more dimensions. *Journal of combinatorial Theory, 3*(3), 244–251.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2003). *Ramsey*. Tratto da Mac Tutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ramsey/

Ramsey, F. P. (1928). On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 264–286.

Raspanti, M.A., & Rogora, E. (2023), Combinatoria per gioco, *Nuova lettera matematica,* V.1 (nuova serie), Maggio 2023, Scienza Express Edizioni, 82-98.

Rittaud, B., & Heeffer, A. (2014). The pigeon principle, two centuries before Dirichlet. *The Mathematical Intelligencer, 36*, 27-29.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.

Watkins, J.J. & Wilson, R. (2013), Combinatorics: Ancient & Modern. Regno Unito: OUP Oxford, 392.